Introdução à Lógica

Edna A. Hoshino

DCT - UFMS

fevereiro de 2011

Definições

Proposição

É uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa (nunca ambos)

Exemplo de proposição verdadeira

1+1=2.

Exemplo de proposição falsa

São Paulo é a capital do Brasil.

Exemplos que não são proposições

Que horas são?
Leia isso cuidadosamente.

Proposições são usualmente denotadas por letras minúsculas como p e q.

Conectivos

Conectivo de negação ($\neg p$)

É usado para inverter o valor de uma proposição. Lê-se não p.

Exemplos de uso

p : Hoje é sexta-feira.
q : Todo homem é mortal.
r : Existem pessoas inseguras.
$\neg p$: Hoje não é sexta-feira.
$\neg q$: Não é verdade que todo homem é mortal.
$\neg q$: Nem todo homem é mortal.
$\neg q$: Existem homens imortais.
$\neg r$?

Conectivos (cont.)

Conjunção ($p \wedge q$)

Ambas as proposições devem ser verdadeiras para que a proposição composta seja verdadeira. Lê-se p e q.

Exemplo

p : Hoje é sexta-feira.
q : Está chovendo.
$p \wedge q$: Hoje é sexta-feira e está chovendo.

Vamos analisar o valor da proposição $p \wedge q$. Se hoje não for sexta-feira então $p \wedge q$ é falsa. Caso contrário, suponha que, embora hoje seja sexta-feira, não esteja chovendo. Logo, $p \wedge q$ também será falsa.

Conectivos (cont.)

Disjunção ($p \vee q$)

Pelo menos, uma das proposições deve ser verdadeira para que a proposição composta seja verdadeira. Lê-se p ou q.

Exemplo

p : Hoje é sexta-feira.
q : Está chovendo.
$p \vee q$: Hoje é sexta-feira ou está chovendo.

Vamos analisar o valor da proposição $p \vee q$. Se hoje não for sexta-feira então não podemos afirmar que $p \vee q$ é falsa. Agora suponha que, embora hoje não seja sexta-feira, esteja chovendo. Logo, $p \vee q$ será verdadeira.

Conectivos (cont.)

Implicação ($p \rightarrow q$)

É a proposição que é falsa sempre que p for verdadeira mas q for falsa e, nos demais casos é verdadeira. p é dito hipótese (premissa) e q é conclusão (conseqüência). Lê-se p implica q.

Exemplo

p : Hoje é sexta-feira.
q : Está chovendo.
$p \rightarrow q$: Hoje é sexta-feira implica que está chovendo.

Vamos analisar o valor da proposição $p \rightarrow q$. Suponha que hoje seja sexta-feira mas não esteja chovendo. Neste caso, p não implica em que q, portanto, $p \rightarrow q$ é falsa. Os demais casos, não são tão intuitivos. Veja: se hoje não for sexta-feira, não importa se esteja ou não chovendo, a proposição $p \rightarrow q$ é verdadeira.

Conectivos (cont.)

Outro exemplo de implicação

p : O chão está molhado.
q : Está chovendo.
$p \rightarrow q$: O chão está molhado implica que está chovendo.

Vamos analisar o valor da proposição $p \rightarrow q$. Se o chão não estiver molhado então não importa se esteja ou não chovendo, $p \rightarrow q$ será verdadeira. Agora, é possível da proposição $p \rightarrow q$ ser falsa? Sim! É possível que o chão esteja molhado mas não esteja chovendo! Por outro lado, a proposição $q \rightarrow p$ é sempre verdadeira!

Outras formas de se expressar a implicação:
Se p então q. Ou ainda, Se p e q.
p somente se q
p é suficiente para q (ou ainda, q é necessário para p).

Conectivos (cont.)

Biimplicação ou equivalência ($p \leftrightarrow q$)

É a proposição que é verdadeira se p e q tiverem os mesmos valores e é falsa, em caso contrário. Lê-se p se e somente se q.

Exemplo

p : O chão está molhado.
q : Está chovendo.
$p \leftrightarrow q$: O chão está molhado se e somente se está chovendo.

Outras formas de se expressar a biimplicação:
p é necessário e suficiente para q.
Se p então q e vice-versa.

Ordem de Precedência dos Conectivos

Ordem de Precedência

()	parênteses internos
$\neg$	negação
$\wedge$	conjunção
$\vee$	disjunção
$\rightarrow$	implicação

Definição

Tabela-verdade

É uma forma organizada de mostrar o relacionamento entre os valores das proposições. Cada linha mostra uma combinação possível de valores das proposições e cada coluna refere-se a uma proposição.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 1: Tabela-Verdade da Negação

Tabela-Verdade (cont.)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2: Tabela-Verdade da Conjunção

Tabela-Verdade (cont.)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 3: Tabela-Verdade da Disjunção

Tabela-Verdade (cont.)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 4: Tabela-Verdade da Implicação

Tabela-Verdade (cont.)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 5: Tabela-Verdade da Biimplicação

Inversa da implicação e Contrapositiva

Oposto da Implicação

$q \rightarrow p$ é o oposto da implicação $p \rightarrow q$.

Inversa da Implicação

$\neg p \rightarrow \neg q$ é a inversa da implicação $p \rightarrow q$.

Contrapositiva

$\neg q \rightarrow \neg p$ é a contrapositiva de $p \rightarrow q$.

Dê a tabela-verdade do oposto, da inversa e da contrapositiva. Compare com a tabela-verdade da implicação.

Tautologia, contradição e equivalência lógica

Tautologia e contradição

Tautologia é uma proposição composta que é sempre verdade, não importando os valores das proposições contidas nela. Já uma contradição é aquela que é sempre falsa.

Equivalências Lógicas ($p \Leftrightarrow q$)

Lê-se p e q são logicamente equivalentes. $p \Leftrightarrow q$ se p e q têm os mesmos valores, ou seja, se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

Exemplos

$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
$p \vee \neg p$ é uma tautologia.
$p \wedge \neg p$ é uma contradição.

Exemplos de equivalências lógicas

equivalência	nome
$p \wedge T \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$	leis da identidade
$p \vee T \Leftrightarrow T$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$	leis da dominância
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	leis da idempotência
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	leis da dupla negação
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	leis comutativa
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	leis da associatividade
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	leis da distributiva
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge p) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	leis de De Morgan

Forma Normal Conjuntiva

Literal

Um literal é uma variável proposicional ou a negação de uma delas.

Cláusula Disjuntiva

É uma fórmula proposicional envolvendo apenas literais e o conectivo de disjunção, sem repetição de variáveis proposicionais.

Forma Normal Conjuntiva

Uma fórmula proposicional está na forma normal conjuntiva (FNC) se é a conjunção de cláusulas disjuntivas, sendo que nenhuma delas está contida na outra.

Exemplo de FNC

$$\neg r \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q)$$

Forma Normal Disjuntiva

Cláusula Conjuntiva

É uma fórmula proposicional envolvendo apenas literais e o conectivo de conjunção, sem repetição de variáveis proposicionais.

Forma Normal Disjuntiva

Uma fórmula proposicional está na forma normal disjuntiva (FND) se é a disjunção de cláusulas conjuntivas, sendo que nenhuma delas está contida na outra.

Exemplo de FND

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$$

Dada uma fórmula proposicional, como obter uma fórmula equivalente na FND?

Tranformando em Forma Normal Disjuntiva

1. escreva a tabela-verdade da fórmula f;
2. escreva uma cláusula conjuntiva para cada linha da tabela, cuja valoração das variáveis dá valor-verdade **1** para f, da seguinte forma:
   - inclua as variáveis que têm valor-verdade **1** na cláusula;
   - inclua a negação das variáveis que têm valor-verdade **0**;
3. a fórmula equivalente a f na FND consiste na disjunção das cláusulas conjuntivas obtidas no passo (2).

Exemplo

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

FND: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Alternativamente, pode-se obter a FND aplicando as leis de equivalência.

Tranformando em Forma Normal Conjuntiva

1. escreva a tabela-verdade da fórmula f;
2. escreva uma cláusula disjuntiva para cada linha da tabela, cuja valoração das variáveis dá valor-verdade **0** para f, da seguinte forma:
   - inclua as variáveis que têm valor-verdade **0** na cláusula;
   - inclua a negação das variáveis que têm valor-verdade **1**;
3. a fórmula equivalente a f na FND consiste na conjunção das cláusulas disjuntivas obtidas no passo (2).

Exemplo

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

FNC: $\neg p \vee \neg q$.

Alternativamente, pode-se obter a FNC aplicando as leis de equivalência.

Coleção funcionalmente completa

Funcionalmente completa

É uma coleção de operadores lógicos (conectivos) na qual qualquer proposição possui uma proposição equivalente envolvendo apenas estes operadores.

$\neg$, $\wedge$ e $\vee$ formam uma coleção funcionalmente completa.

Mostre que $\neg$ e $\wedge$ também formam uma coleção funcionalmente completa.

Mostre que $\neg$ e $\vee$ também formam uma coleção funcionalmente completa.

Mostre que o operador NOR é funcionalmente completo. p NOR q é verdadeiro se e somente se ambos p e q forem falsos.

Exercícios

1. Escreva as sentenças a seguir em linguagem simbólica, usando sentenças atômicas e conectivos:
   1. Se Antônio está feliz então a esposa de Antônio não está feliz e se Antônio não está feliz então a esposa do Antônio não está feliz.
   2. Tereza vai ao cinema somente se o filme for uma comédia.
   3. Ou Capitu é ou não é a criação mais notável de Machado de Assis.
   4. Não é verdade que Machado de Assis escreveu ou não escreveu poesias.
   5. Uma condição suficiente para x ser ímpar é x ser primo.
   6. Ou x é positivo ou x é negativo, nunca ambos.
2. Determine se a sentença é uma tautologia, contradição ou contigência:
   1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$;
   2. $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \leftrightarrow \neg b$;
3. Dê a contrapositiva de cada uma das seguintes implicações:
   1. Se nevar hoje, irei esquiar amanhã.
   2. Irei à aula se brincadeiras estiverem programadas.
   3. Um inteiro positivo é primo somente se ele não tiver divisores diferentes que 1 e ele mesmo.

Exercícios

4. Mostre que cada uma das seguintes implicações é uma tautologia usando tabela-verdade:
   1. $[\neg p \land (p \lor q)] \to q$;
   2. $[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$;
   3. $[p \land (p \to q)] \to q$;
   4. $[(p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to r)] \to r$.
5. Mostre usando tabela-verdade as leis de equivalência lógica.

Exercícios

6. Para cada uma das proposições use identidades para encontrar proposições equivalentes com somente $\neg$ e $\land$ e que sejam as mais simples possíveis:
   1. $p \lor q \lor \neg r$;
   2. $p \lor [(\neg q \land r) \to p]$;
   3. $p \to (q \to p)$.
7. Para cada uma das proposições use identidades para encontrar proposições equivalentes com somente $\neg$ e $\lor$ e que sejam as mais simples possíveis:
   1. $(p \land q) \land \neg p$;
   2. $[p \to (q \lor \neg r)] \land \neg p \land q$;
   3. $\neg p \land \neg q \land (\neg r \to p)$.

Exercícios

8. Mostre as seguintes tautologias, simplificando o lado esquerdo para a forma do lado direito usando identidades:
   1. $[(p \land q) \to p] \leftrightarrow T$;
   2. $\neg(\neg(p \lor q) \to \neg p) \leftrightarrow F$;
   3. $[(p \to \neg p) \land (\neg p \to p)] \leftrightarrow F$.
9. O operador nand ($|$) é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Mostre que:
   1. $p|p \Leftrightarrow \neg p$;
   2. $p|q \Leftrightarrow \neg(p \land q)$;
   3. $(p|p)|(q|q) \Leftrightarrow p \lor q$;
   4. $(p|q)|(p|q) \Leftrightarrow p \land q$.

Exercícios

10. Um conjunto de proposições é consistente se existir uma associação de valores para suas variáveis que torna cada uma das proposições do conjunto verdadeira. Verifique se as seguintes proposições formam um sistema consistente:
    1. "O sistema está no estado multiusuário se e somente se ele está operando normalmente. Se o sistema está operando normalmente, o kernel está funcionando. O kernel não está funcionando ou o sistema está no modo de interrupção. Se o sistema não está no estado multiusário então ele está no modo de interrupção. O sistema não está no modo de interrupção."
    2. "Se o sistema de arquivos não está bloqueado então novas mensagens serão enfileiradas. Se o sistema de arquivos não está bloqueado, então o sistema está funcionando normalmente e vice-versa. Se novas mensagens não estão sendo enfileiradas então eles serão enviados para o buffer de mensagens. Se o sistema não está bloqueado então novas mensagens serão enviadas para o buffer de mensagens. Novas mensagens não serão enviadas para o buffer de mensagens."

Variáveis e Predicados

Predicado ($P(x)$)

É uma propriedade sobre uma variável x e, portanto, tem um valor verdadeiro ou falso quando um valor é associado à variável. $P(x)$ também é conhecido como o valor da função proposicional P em x.

Exemplo

Considere $P(x)$ denotando a sentença $x > 3$. Portanto, $P(2)$ é falso e $P(4)$ é verdadeiro.

Um predicado pode envolver mais de uma variável. Por exemplo, um predicado $Q(x, y, z)$ pode denotar a sentença $x = y + z$.

Universo do Domínio e Quantificadores

Universo do Domínio (do discurso)

É o domínio das variáveis.

Quantificadores

São expressões usadas nas sentenças para especificar a que elementos do universo do domínio o predicado se aplica. .

Quantificador Universal ($\forall x P(x)$)

É usado para especificar que o predicado se aplica a todos os elementos do domínio. Lê-se para todo x vale $P(x)$.

Quantificador Existencial ($\exists x P(x)$)

É usado para especificar que o predicado se aplica a algum elemento do domínio. Lê-se existe algum x tal que $P(x)$.

Universo do Domínio e Quantificadores (cont.)

Exemplos

Considere que:

- $P(x)$ denota "x estudou Cálculo";
- o universo do discurso consista de todos os estudantes de FTC.

$\forall x P(x)$ equivale a "todo estudante de FTC estudou Cálculo".
$\exists x P(x)$ equivale a "algum estudante de FTC estudou Cálculo".

Se

- $S(x)$ denota "x estuda FTC";
- o universo do discurso consista de todos os estudantes.

$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$ equivale a "todo estudante de FTC estudou Cálculo".

Universo do Domínio e Quantificadores (cont.)

Exemplos

Considere que:

- $P(x)$ denota "$x > 2$";
- o universo do discurso consista de todos os números inteiros.

$\forall x P(x)$ é falso, uma vez que existem inteiros para os quais $P(x)$ é falso. Portanto, $\exists x P(x)$ é verdadeiro.

Outros Quantificadores

Quantificador de Unicidade ($\exists! x P(x)$)

É usado para especificar que o predicado se aplica a exatamente um único elemento do domínio. Lê-se existe um único x tal que $P(x)$.

Exemplo

Considere que:

- $P(x, y)$ denota "$x.y = x$";
- o universo do discurso consista de todos os números inteiros.

$\exists! y \forall x P(x, y)$ é verdadeiro, uma vez que 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

O quantificador de unicidade pode ser substituído por outros quantificadores e pelo uso de lógica proposicional (veja exercícios!).

Exercícios

1. Expresse cada uma das sentenças como uma expressão lógica, considerando o universo do discurso, o conjunto de todas as pessoas, e usando os predicados indicados:
   1. "Toda pessoa tem exatamente um melhor amigo".
      - $B(x, y)$: y é o melhor amigo de x.
   2. "Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos então esta pessoa é mãe de alguém".
      - $F(x)$: x é do sexo feminino;
      - $P(x)$: x tem filhos;
      - $M(x, y)$: y é mãe de x.
2. (ordem dos quantificadores) Qual o valor de cada uma das sentenças se o universo do discurso é o conjunto dos inteiros e $Q(x, y)$ denota $x + y = 0$?
   1. $\forall x \exists y Q(x, y)$;
   2. $\exists y \forall x Q(x, y)$.
3. (negando quantificadores) Escreva sentenças equivalentes a:
   1. $\neg \exists x P(x)$;
   2. $\neg \forall x P(x)$.

Exercícios

4. Determine quais das seguintes proposições são verdadeiras se o universo do domínio são os inteiros e . denota a operação de multiplicação:
   1. $\forall x \exists y [x.y = 0]$;
   2. $\forall x \exists y [x.y = 1]$;
   3. $\exists y \forall x [x.y = 1]$;
   4. $\exists y \exists x [x.y = x]$.
5. Considere $\mathbb{Z}$ o universo do discurso e $P(x, y, z)$, $E(x, y)$ e $G(x, y)$ denotando $xy = z$, $x = y$ e $x > y$, respectivamente. Transcreva cada uma das proposições em notação de lógica:
   1. Se $y = 1$ então $xy = x$ para qualquer x.
   2. Se $xy \neq 0$ então $x \neq 0$ e $y \neq 0$.
   3. Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
   4. $3x = 6$ se e somente se $x = 2$.
   5. Não existe solução para $x^2 = y$ a menos que $y \geq 0$.
   6. Não pode acontecer $x = y$ e $x < y$.
   7. Se $x < y$ então para algum z tal que $z < 0$, $xz > yz$.
   8. Existe um x tal que para todo y e z, $xy = xz$.

Exercícios

6. Coloque os seguintes em notação lógica. Escolha predicados de modo que cada assertiva tenha pelo menos um quantificador:
   1. Existe um e apenas um número primo par.
   2. Nenhum número ímpar é par.
   3. Todo trem é mais rápido que alguns carros.
   4. Alguns carros são mais lentos que todos os trens mas pelo menos um trem é mais rápido que todo carro.
7. Qual o valor lógico de cada uma das proposições se $\mathbb{Z}$ é o universo do discurso?
   1. $\forall x \exists y (x + y = x)$;
   2. $\forall x \exists y (x + y = 0)$;
   3. $\exists y \forall x (x + y = x)$;
   4. $\exists y \forall x (x + y = 0)$;
   5. $\forall x [x < 0 \rightarrow \exists y (y > 0 \wedge x + y = 0)]$;
   6. $\exists x \exists y (x^2 = y)$.

Exercícios

8. Qual o valor-verdade das seguintes sentenças?
   1. $\exists! x P(x) \to \exists x P(x)$;
   2. $\forall x P(x) \to \exists! x P(x)$;
   3. $\exists! x \neg P(x) \to \neg \forall x P(x)$;
9. Escreva $\exists! x P(x)$, cujo universo do domínio consiste dos inteiros 1,2 e 3, usando apenas os quantificadores existenciais, universais e conectivos de negação, conjunção e disjunção.
10. Faça o mesmo que no exercício anterior, mas desta vez considerando o universo do domínio sendo o conjunto dos inteiros.

Teoremas, axiomas e Inferência lógica

Teorema

É uma sentença que pode ser mostrada ser verdadeira.

Prova

É uma seqüência de afirmações que formam um argumento para demonstrar a veracidade de um teorema.

Axiomas ou postulados

São afirmações sobre estruturas matemáticas, que são consideradas verdadeiras e usadas como hipóteses na prova de outros teoremas.

Regras de inferência

Mecanismos para se obter conclusões sobre outras assertivas, que juntas formam os passos de uma prova.

Regras de Inferência

Modus Pones

É a base das regras de inferência e dada pela tautologia

$$(p \wedge (p \to q)) \to q.$$

Dada uma implicação, se ela e sua hipótese são verdadeiras então sua conseqüência também o é.
É escrita na forma

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Outras Regras de Inferência

regra	tautologia	nome
$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$	adição
$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$	simplificação
$\begin{array}{c} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$	modus tollens
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (q \to r)$	silogismo hipotético
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$[(p \vee q) \vee \neg p] \to q$	silogismo disjuntivo

Demonstre a validade das regras!

Mais regras de inferência

regra	tautologia	nome
p q $\therefore p \wedge q$	$[(p) \wedge (q)] \rightarrow (p \wedge q)$	conjunção
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$	resolução

Exemplifique as regras!

Exemplos

Qual das regras de inferência é usada no seguinte argumento?

"Se chover hoje então não teremos churrasco hoje. Se não tiver churrasco hoje então teremos churrasco amanhã. Portanto, se chover hoje então teremos churrasco amanhã."

- Um argumento construído usando regras de inferência é dito ser válido.
- Quando todas as proposições usadas em um argumento são verdadeiras, obtém-se uma conclusão correta.
- Note que um argumento válido pode levar a conclusões incorretas se uma ou mais proposições falsas são usadas no argumento !

Exemplo de argumento válido e conclusão incorreta

"Se 101 é divísel por 3 então 101^2 é divisível por 9. 101 é divisível por 3. Consequentemente, 101^2 é divisível por 9."

Falácias

Falácia

É um tipo de raciocínio incorreto que leva a conclusões erradas.

Exemplo

"Se você resolver todos os exercícios do livro-texto então você aprenderá matemática discreta. Você aprendeu matemática discreta. Portanto, você resolveu todos os exercícios do livro-texto."

O exemplo acima trata-se de um erro comum ao usar a proposição

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

como uma tautologia!

Usando regras de inferências

Dedução ($P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash P$)

Regras de inferências podem ser aplicadas para construir um argumento válido para a conclusão P a partir das hipóteses $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Equivale a provar que

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow P.$$

Isso é feito construindo-se uma seqüência de argumentos, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, onde:

- cada A_i
  - ou é um argumento da hipótese;
  - ou é o resultado da aplicação de alguma regra de inferência ou identidade em $A_1, \ldots, A_{i-1}$;
- e $A_k = P$.

Usando regras de inferências

Exemplo 1

$$(F \vee A) \rightarrow M, M \rightarrow P, \neg P \vdash \neg A.$$

(1)	$(F \vee A) \rightarrow M$	hipótese
(2)	$M \rightarrow P$	hipótese
(3)	$(F \vee A) \rightarrow P$	silogismo em (1) e (2)
(4)	$\neg P$	hipótese
(5)	$\neg(F \vee A)$	modus tollens em (3) e (4)
(6)	$\neg F \wedge \neg A$	lei de Morgan em (5)
(7)	$\neg A$	simplificação em (6)

Usando regras de inferências

Exemplo 2

Mostre que as hipóteses “Não está ensolarado hoje à tarde e está mais frio que ontem”, “Iremos nadar somente se estiver ensolarado”, “Se não formos nadar, então pegaremos uma canoa” e “se pegarmos uma canoa então ficaremos em casa até o pôr-do-sol” levam à conclusão “Ficaremos em casa até o pôr-do-sol”.

Solução

Considere

- p: está ensolarado hoje à tarde;
- q: está mais frio que ontem;
- r: iremos nadar;
- s: pegaremos uma canoa;
- t: ficaremos em casa até o pôr-do-sol.

Usando regras de inferências

Queremos argumento válido para

$$\neg p \wedge q, r \rightarrow p, \neg r \rightarrow s, s \rightarrow t \vdash t.$$

(1)	$\neg p \wedge q$	hipótese
(2)	$\neg p$	simplificação de (1)
(3)	$r \rightarrow p$	hipótese
(4)	$\neg r$	modus tollens usando (2) e (3)
(5)	$\neg r \rightarrow s$	hipótese
(6)	s	modus ponens usando (4) e (5)
(7)	$s \rightarrow t$	hipótese
(8)	t	modus ponens usando (6) e (7)

Um meio alternativo de mostrar que uma implicação é válida é usando tabela-verdade. No exemplo, a tabela-verdade teria 32 linhas !

Exercícios

1. Para cada conjunto de hipóteses dados, decida se é possível chegar a alguma conclusão e, nesse caso, descreva-a. Justifique sua resposta.
   1. Ou estou gorda ou magra. Com certeza eu não estou magra.
   2. Se eu correr fico sem fôlego. Eu não estou sem fôlego.
   3. Céu azul me deixa feliz e céu nublado me deixa triste. O céu está azul ou nublado.
   4. Se meu programa funciona, eu estou feliz. Se eu estou feliz, o sol brilha. São 11 horas da noite e está muito escuro.
2. Justifique cada passo na seqüência de demonstração da proposição: $[A \rightarrow (B \vee C)] \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg A$
   1. $A \rightarrow (B \vee C)$
   2. $\neg B$
   3. $\neg C$
   4. $\neg B \wedge \neg C$
   5. $\neg(B \vee C)$
   6. $\neg A$.

Exercícios

3. Prove que cada uma das proposições é válida:
    1. $\neg A \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow \neg B$;
    2. $(A \rightarrow B) \wedge [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$;
    3. $\neg A \wedge (A \vee B) \rightarrow B$;
    4. $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \wedge (A \vee \neg D) \wedge B \rightarrow (D \rightarrow C)$;
4. Formule os seguintes argumentos na notação de lógica de predicados e forneça uma demonstração da validade de sua conclusão:
    - Se o programa é eficiente então ele executa rapidamente. Ou o programa é eficiente ou ele tem algum bug. No entanto, o programa não executa rapidamente. Logo, ele tem um bug.
    - Se José levou as jóias ou a Sra Krasov mentiu então foi cometido um crime. O Sr. Krasov não estava na cidade. Se um crime foi cometido, então o Sr. Krasov estava na cidade. Portanto, José não levou as jóias.
    - Não é verdade que, se as tarifas de energia elétrica subirem, então o uso diminuirá, nem é verdade que ou novas usinas serão construídas ou as contas não serão pagas com atraso. Portanto, o uso não vai diminuir e as contas serão pagas com atraso.

Exercícios

5. Use lógica proposicional para provar que o argumento do advogado de defesa enunciado no início do curso é válido.

Problema de Lógica

Você foi convocado a participar do júri em um processo criminal. O advogado de defesa apresentou o seguinte argumento:

"Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, segue que Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente."

Regras de Inferência para predicados e quantificadores

- instanciação universal:

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- generalização universal:

$$\frac{P(c) \text{ para } c \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x P(x)}$$

- instanciação existencial:

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algum } c}$$

- generalização existencial:

$$\frac{P(c) \text{ para algum } c}{\therefore \exists x P(x)}$$

Exemplo 1

Exemplo de instanciação universal

"Todos os alunos de FTC são alunos do curso de computação", "Maria é aluna de FTC", portanto, "Maria é aluna do curso de computação".

Solução

Considere:

- $D(x)$: "x é aluno de FTC";
- $C(x)$: "x é aluno do curso de computação".

Queremos provar que $\forall x(D(x) \rightarrow C(x)), D(Maria) \vdash C(Maria)$.

(1)	$\forall x(D(x) \rightarrow C(x))$	hipótese
(2)	$D(Maria) \rightarrow C(Maria)$	instanciação universal de (1)
(3)	$D(Maria)$	hipótese
(4)	$C(Maria)$	modus ponens usando (2) e (3)

Exemplo 2

“Um estudante desta sala não leu o livro-texto” e “Todos estudantes desta sala passaram no primeiro exame” implica que “algum estudante que passou no primeiro exame não leu o livro-texto”.

Solução

Considere:

- $B(x)$: “x leu o livro-texto”;
- $C(x)$: “x é estudante desta sala”;
- $D(x)$: “x passou no primeiro exame”.

Exemplo 2 (cont.)

Queremos provar que
$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow D(x)) \vdash \exists x(D(x) \wedge \neg B(x))$.

(1)	$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)))$	hipótese
(2)	$C(a) \wedge \neg B(a)$	instanciação existencial de (1)
(3)	$C(a)$	simplificação de (2)
(4)	$\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$	hipótese
(5)	$C(a) \rightarrow D(a)$	instanciação universal de (4)
(6)	$P(a)$	modus ponens de (3) e (5)
(7)	$\neg B(a)$	simplificação de (2)
(8)	$p(a) \wedge \neg B(a)$	conjunção de (6) e (7)
(9)	$\exists x(D(x) \wedge B(x))$	generalização existencial de (8)

Outras regras de inferência

Regras de inferência da lógica proposicional podem ser combinadas com aquelas dos quantificadores.

- modus ponens universal:

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ P(a),\ \text{para algum } a \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

- modus tollens universal:

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \neg Q(a),\ \text{para algum } a \\ \hline \therefore \neg P(a) \end{array}$$

Exemplo de uso do modus ponens universal

Considerando que “Para todo inteiro positivo maior que 4 tem-se que n^2 é menor que 2^n”, mostre que $100^2 < 2^{100}$.

Solução

Considere

- $P(n)$: “$n > 4$”;
- $Q(n)$: “$n^2 < 2^n$”.

Queremos provar que $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n)), P(100) \vdash Q(100)$.

(1)	$\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$	hipótese
(2)	$P(100)$	hipótese
(3)	$Q(100)$	modus ponens universal de (1) e (2)

Exercícios

1. Para cada conjunto de hipóteses dados, decida se é possível chegar a alguma conclusão e, nesse caso, descreva-a. Justifique sua resposta.
    1. Todas as flores são plantas. Amores-perfeitos são flores.
    2. Todas as flores são vermelhoras ou roxas. Amores-perfeitos são flores. Amores-perfeitos não são roxos.
    3. Algumas flores são roxas. Todas as flores roxas são pequenas.
    4. Algumas flores são vermelhas. Algumas flores são roxas. Amores-perfeitos são flores.
    5. Algumas flores são vermelhas e têm espinhos. Todas as flores com espinhos cheiram mal. Toda flor que cheira mal é erva daninha.
2. Justifique cada passo na seqüência de demonstração da proposição: $\exists x[P(x) \to Q(x)] \to [\forall x P(x) \to \exists x Q(x)]$
    1. $\exists x[P(x) \to Q(x)]$
    2. $P(a) \to Q(a)$
    3. $\forall x P(x)$
    4. $P(a)$
    5. $Q(a)$
    6. $\exists x Q(x)$.

Exercícios

3. Prove que cada uma das proposições é válida:
    1. $\forall x P(x) \to \forall x[P(x) \vee Q(x)]$;
    2. $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$;
    3. $\exists x \exists y P(x, y) \to \exists y \exists x P(x, y)$;
    4. $\forall x \forall y Q(x, y) \to \forall y \forall x Q(x, y)$;
    5. $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \to \exists x Q(x)$.
4. Formule os silogismos perfeitos de Aristóteles na notação de lógica de predicados e forneça uma demonstração de sua validade:

    Bárbara Todos os M são P. Todos os S são M. Portanto, todos os S são P.
    Celarent Nenhum M é P. Todos os S são M. Portanto, nenhum S é P.
    Darii Todos os M são P. Algum S é M. Portanto, algum S é P.
    Ferio Nenhum M é P. Algum S é M. Portanto, algum S não é P.
5. Prove que a proposição é válida ou encontre uma interpretação na qual ela é falsa:
    1. $\exists x[R(x) \wedge S(x)] \to \exists x R(x) \wedge \exists x S(x)$;
    2. $\exists x[R(x) \vee S(x)] \to \exists x R(x) \vee \exists x S(x)$;
    3. $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$;
    4. $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \to \forall x[P(x) \vee Q(x)]$.

Exercícios

6. Verifique se os seguintes são logicamente equivalentes:
    1. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ e $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$;
    2. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ e $\forall x \forall y[P(x) \vee Q(y)]$;
    3. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ e $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$;
    4. $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ e $\forall x \exists y[P(x) \wedge Q(y)]$;
    5. $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ e $\forall x \exists y[P(x) \vee Q(y)]$.
7. Uma proposição está na Forma Normal Prenex (PNF) se e somente se é da forma: $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_k x_k P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ onde cada Q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, é um quantificador existencial ou universal e $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um predicado que não envolve nenhum quantificador. Coloque cada uma das seguintes proposições em PNF:
    1. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$, onde A é uma proposição não envolvendo quantificadores;
    2. $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$;
    3. $\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$.