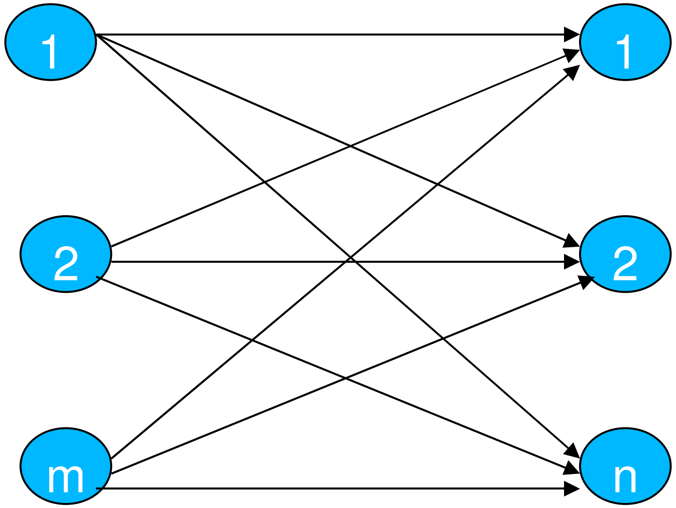
Pesquisa Operacional Modelos, Conceitos Básicos para PL

Prof. Ricardo Santos

Problema do Transporte

- Centros de produção de produtos são denominados origens
- Mercados consumidores são denominados destinos
- Supor a existência de **m** origens e **n** destinos e o custo de transporte de uma unidade do produto da origem i para o destino j é $\mathbf{c}_{ij}$
- Oferta do produto na origem i é $\mathbf{a}_i$ e a demanda do produto no destino j é $\mathbf{b}_j$



Problema do Transporte

- As variáveis do problema são as quantidades transportadas das origens aos destinos:
  - x_{ij} quantidade transportada da origem i para o destino j
  - $c_{ij}x_{ij}$ é o custo incorrido para realizar o transporte de i para j com a quantidade x de produtos com o custo c
  - O custo total de transporte é a soma dos custos de transporte de todas as quantidades transportadas de todas as origens i a todos os destinos j. Esse custo deve ser minimizado.
  - Observe que:
    - O que é transportado de cada origem i a todos os destinos j não pode ultrapassar a quantidade ofertada em i
    - As quantidades transportadas das diversas origens ao destino j satisfaçam a demanda requerida neste destino
- Como seria o modelo de PO para esse problema?

Problema do Transporte

- Modelo Matemático de PO
  - Minimizar $f(x_{11}, ..., x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$
  - s.a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad j = 1, \ldots, n$$

Problema do Transporte - Exercício

- Considere uma distribuidora de bebidas com 2 centros de distribuição: Paranaíba e Sonora e quatro mercados consumidores principais: Campo Grande, Dourados, Corumbá e Três Lagoas. O custo unitário para transportar uma unidade do produto de cada centro de produção a cada mercado é dado na Tabela a seguir:

Centro de distribuição	Mercado				**Suprimento disponível**
	CGrande	Dourados	Corumbá	TLagoas	
Paranaíba	5	7	10	4	950
Sonora	5	8	7	11	1200
Demanda	900	500	300	350	

- Elabore o modelo matemático que representa esse problema

Problema do Planejamento de Produção

- Esses problemas envolvem decidir quais produtos e quanto fabricar de cada produto em um período visando a maximização das margens de lucro da empresa
- Considere x_j a quantidade do produto j=1,2,..., n a ser produzida em um período de planejamento
- Seja C_i, i=1,2,...m a capacidade do recursos disponível no período
- Para produzir o produto j, são consumidas a_{ij} unidades do recurso i
- Uma produção mínima do produto j, digamos d_j, precisa ser realizada no período
- As vendas do produto não excedem v_j unidades no período em estudo
- Cada unidade do produto j resulta em uma contribuição ao lucro de l_j para a empresa

Problema do Planejamento de Produção

- O problema do Planejamento (Mix) de Produção

Maximizar $f(x_1,..., x_n)= \sum_{j=1}^{n} l_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq C_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$d_j \leq x_i \leq v_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Problema do Planejamento de Produção

- Um fabricante de geladeiras deve decidir quais modelos deve produzir numa fábrica recentemente instalada
- A empresa sabe que 1500 unidades do modelo de luxo e 6000 unidades do modelo básico
- A empresa dispõe de 25000 homens-hora/mês. Cada modelo de luxo requer 10 homens-hora e o modelo básico requer 8 homens-hora
- A linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos
- A capacidade de produção dessa linha é de 4500 geladeiras por mês
- O lucro do modelo luxo é de R$ 100,00 e do modelo básico é de R$ 50,00

- **Elabore o modelo matemático de modo a determinar quanto produzir de cada modelo para maximizar o lucro da empresa.**

Hipóteses de Linearidade

- Hipóteses que os modelos de PL devem obedecer:
  - Aditividade: o todo é igual à soma das partes
  - Proporcionalidade: se a_{ij} é a quantidade do componente i em uma unidade do ingrediente j, então $a_{ij}x_j$ será a quantidade do componente i em x_j unidades
  - Francionamento: valores fracionários para as variáveis são aceitáveis. Porém, dependendo do problema, o arredondamento de valores pode ter conotação distorcida da prática (ex: número de máquinas)

Conceitos Básicos para PL

- Definição 1: Modelos de PL obedecem a uma forma (formato) padrão:
  - minimizar $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1,c_2x_2,\ldots,c_nx_n$
  - s.a

    $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$
    $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$
    ...
    $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$
    $x_1>=0,\ x_2>=0,\ \ldots,\ x_n>=0,$

- O modelo anterior pode ser escrito equivalentemente em notação matricial como:
  - Minimizar $f(\mathbf{x})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

    $\mathbf{Ax=b}$

    $\mathbf{x>=0},$

Conceitos Básicos para PL

- O modelo anterior pode ser escrito equivalentemente em notação matricial como:
  - Minimizar f(**x**)=$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

    Ax=b

    x>=0,
- Observe que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma matrix mxn, chamada matriz de coeficientes

- $c^T=(c_1, c_2, ..., c_n)$ é o vetor de custos
- $x^T=(x_1, x_2, ..., x_n)$ é o vetor de variáveis
- $b^T=(b_1, b_2, ..., b_m)$ é o vetor de termos independentes

Conceitos Básicos para PL

- Definição 2: Uma solução (x_1, x_2, ..., x_n) é dita factível se satisfazer as restrições e as condições de não-negatividade. O conjunto de todas as soluções factíveis é chamada de região factível
- Definição 3: Uma solução factível que fornece o menor valor (considerando minimização) à função objetivo f é chamada solução ótima, denotada por (x_1^*, x_2^*, ...,x_n^*). Uma solução factível é ótima se:
  - $f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)<=f(x_1,x_2,...,x_n)$, para qualquer solução factível $f(x_1,x_2,...,x_n)$

Conceitos Básicos para PL

- Transformação na forma padrão: Problemas de Maximização
  - Encontrar uma solução ótima que maximize a função objetivo, corresponde a encontrar uma solução factível $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ tal que
    - $f(x^*)>=f(x)$, para toda solução x factível
  - Se multiplicarmos essa desigualdade por -1, tem-se
    - $-f(x^*)<=-f(x)$, para toda solução x factível
  - De forma que encontrar uma solução factível x^* que maximize $f(x)$ é equivalente a encontrar uma solução factível x^* que minimize $–f(x)$

Conceitos Básicos para PL

- Transformação na forma padrão: Problemas de Maximização
  - O seguinte problema de PL

Maximizar $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1-x_2+4x_3$

$$x_1+2x_2+x_3=3$$

$$x_2+2x_3=4$$

$$x_1>=0,\ x_2>=0,\ x_3>=0$$

  - É equivalente ao problema na forma padrão

Minimizar $-f(x_1, x_2, x_3)=-2x_1+x_2-4x_3$

$$x_1+2x_2+x_3=3$$

$$x_2+2x_3=4$$

$$x_1>=0,\ x_2>=0,\ x_3>=0$$

Conceitos Básicos para PL

- Transformação na forma padrão: Restrições de desigualdade
  - Se as restrições do problema são dadas na forma de desigualdades, inserimos novas variáveis para transformá-lo na forma padrão
    - Exemplo: $3x_1+4x_2-x_3<=7$
    - E note que: $x_k=b_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n)>=0$
    - Então, o exemplo fica da seguinte forma: $3x_1+4x_2-x_3+x_4=7$
    - Igualmente, se tivéssemos: $3x_1+4x_2-x_3>=7$
    - Teríamos como resultado da transformação: $3x_1+4x_2-x_3-x_4=7$
  - Essas variáveis adicionais (nesses exemplos: x_4) são chamadas de **variáveis de folga** (para as restrições de >=, a variável introduzida é chamada **variável de excesso**)

Conceitos Básicos para PL

- Transformação na forma padrão: Restrições de desigualdade

  - Exemplo:

    Minimizar $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-3x_2+3x_3$

    $x_1+2x_2-x_3 >= 3$

    $-2x_1+x_2+x_3 <=-1$

    $x_1>=0,\ x_2>=0,\ x_3>=0$

  - Introduzindo as variáveis de folga, temos:

    Minimizar $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-3x_2+3x_3+0x_4+0x_5$

    $x_1+2x_2-x_3-x_4 = 3$

    $-2x_1+x_2+x_3+x_5 =-1$

    $x_1>=0,\ x_2>=0,\ x_3>=0,\ x_4>=0,\ x_5>=0$