Pesquisa Operacional
Resolução através do Método Gráfico

Prof. Ricardo Santos

Solução Gráfica

- Representação gráfica de problemas de PL possibilita entender várias propriedades teóricas e delinear um método de solução
- Consideraremos duas variáveis para ilustrar soluções factíveis e a solução ótima em um plano cartesiano

Solução Gráfica

- Exemplo1:

  Max $f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$

  s.a. $x_1+x_2<=4$

  $x_1 \quad <=2$

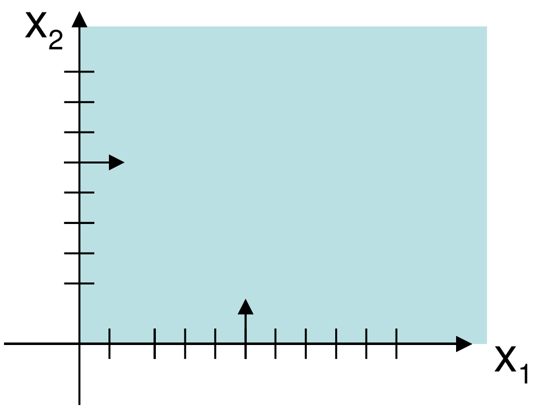
  $x_2<=3$

  $x_1>=0,\ x_2>=0$

- A região factível é denominada
  - $S=\{(x_1,\ x_2)$ tal que $x_1+x_2<=4,\ x_1=2,\ x_2<=3,\ x_1>=0,\ x_2>=0\}$.

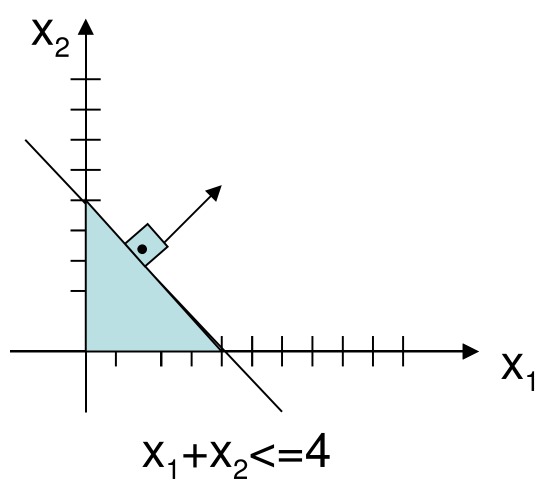
Solução Gráfica

- Deve-se ter em mente que a região factível deve satisfazer todas as restrições
- Observe que as restrições de não-negatividade ($x_1>=0$, $x_2>=0$) indicam que a região factível está no 1o. quadrante do plano cartesiano



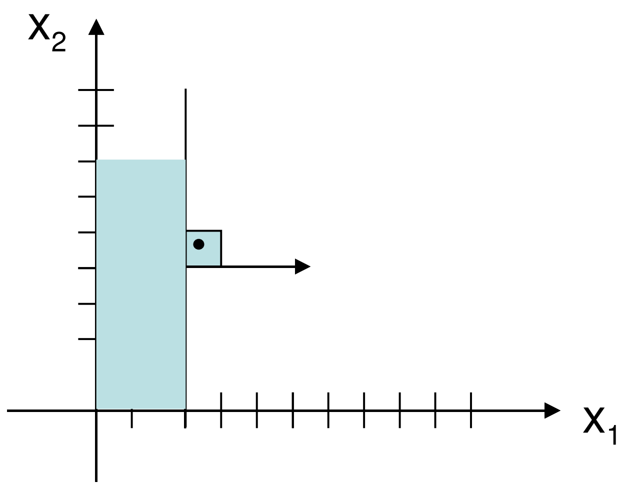
Solução Gráfica

- Considere agora os pontos que satisfazem $x_1+x_2=4$
  - Observe que esta equação é uma reta no plano
  - Observe também que os coeficientes da reta, vetor $(1,1)^T$ é perpendicular à reta
  - Observe que o vetor $(1,1)^T$ aponta no sentido que x_1+x_2 cresce
  - A reunião dos pontos $x_1+x_2<4$ e $x_1+x_2=4$ é o que nos interessa

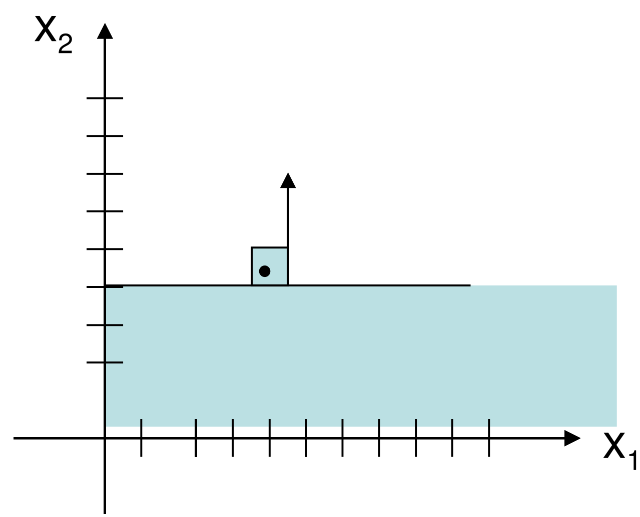


Solução Gráfica

- De modo semelhante à restrição $x_1+x_2<=4$, desenhamos as regiões que satisfazem as restrições $x_1<=2$ e $x_2<=3$



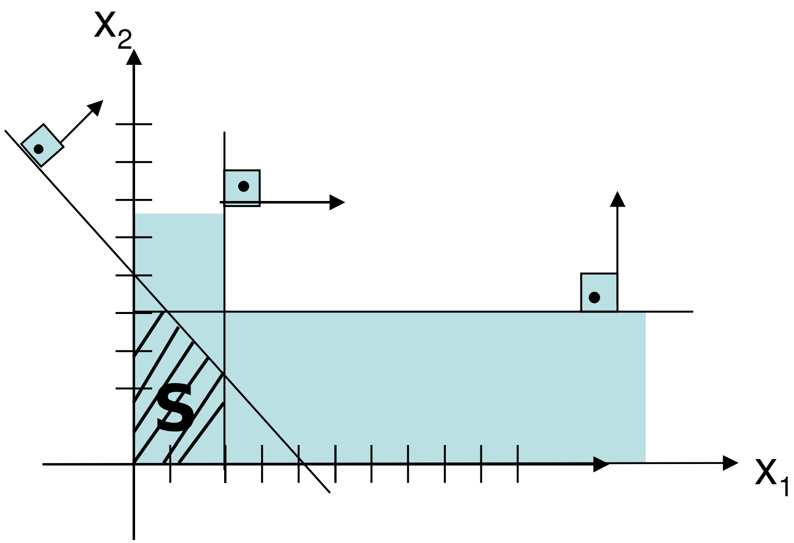
$x_1<=2$



$x_2<=3$

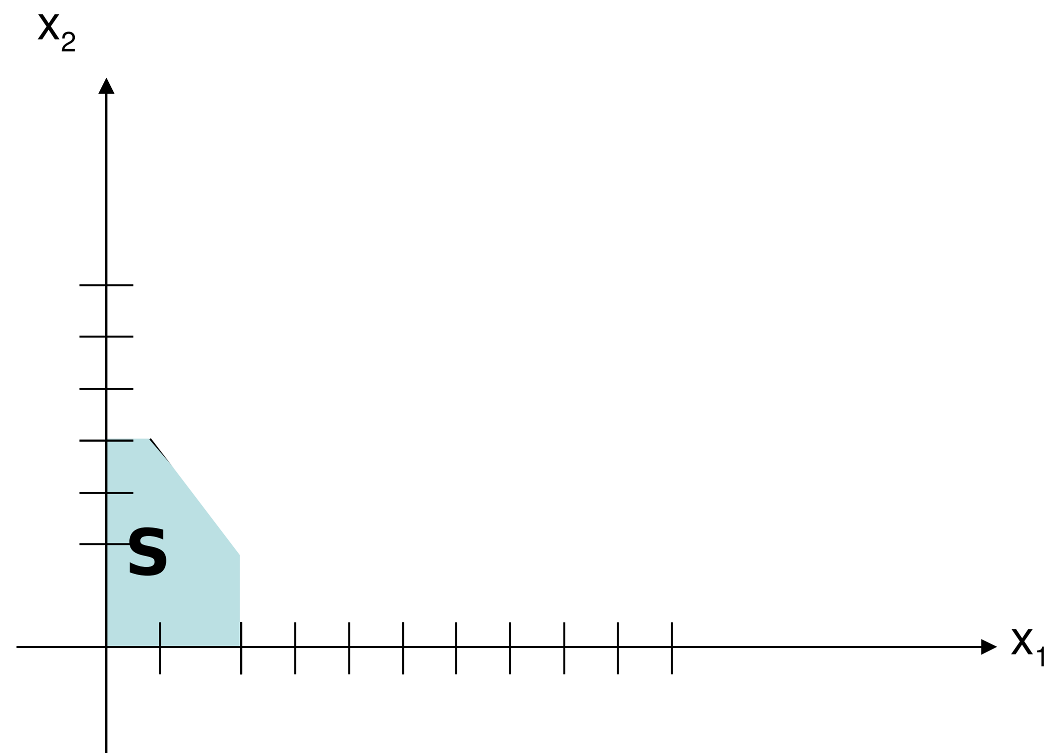
Solução Gráfica

- A intersecção de todas as regiões representadas nos gráficos anteriores define a região factível S
- A função objetivo $f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ definida no conjunto S pode assumir infinitos valores



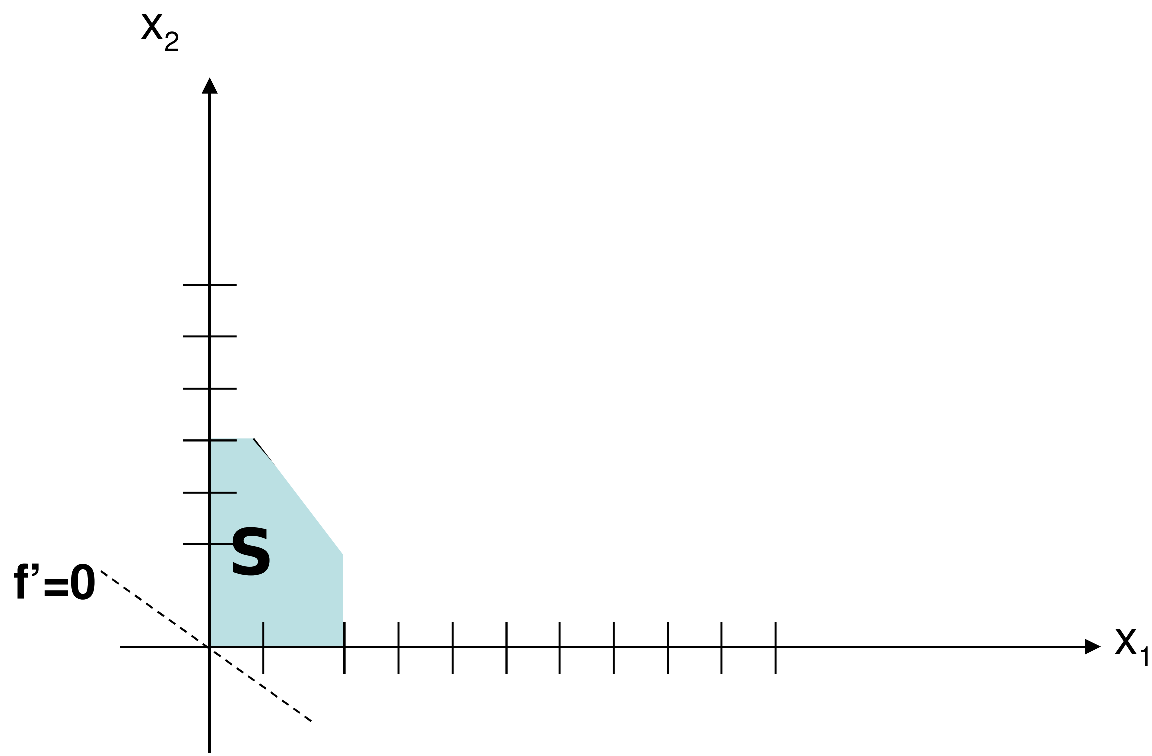
Solução Gráfica

- A intersecção de todas as regiões representadas nos gráficos anteriores define a região factível S
- A função objetivo $f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ definida no conjunto S pode assumir infinitos valores
- Note que a solução factível $x'=(x_1',x_2')^T=(0,0)^T$, faz com que o valor da função seja $f'=f(x')=0$ e todos os pontos do plano que atribuem este mesmo valor à função objetivo (curva de nível) estão na reta $x_1+2x_2=0$



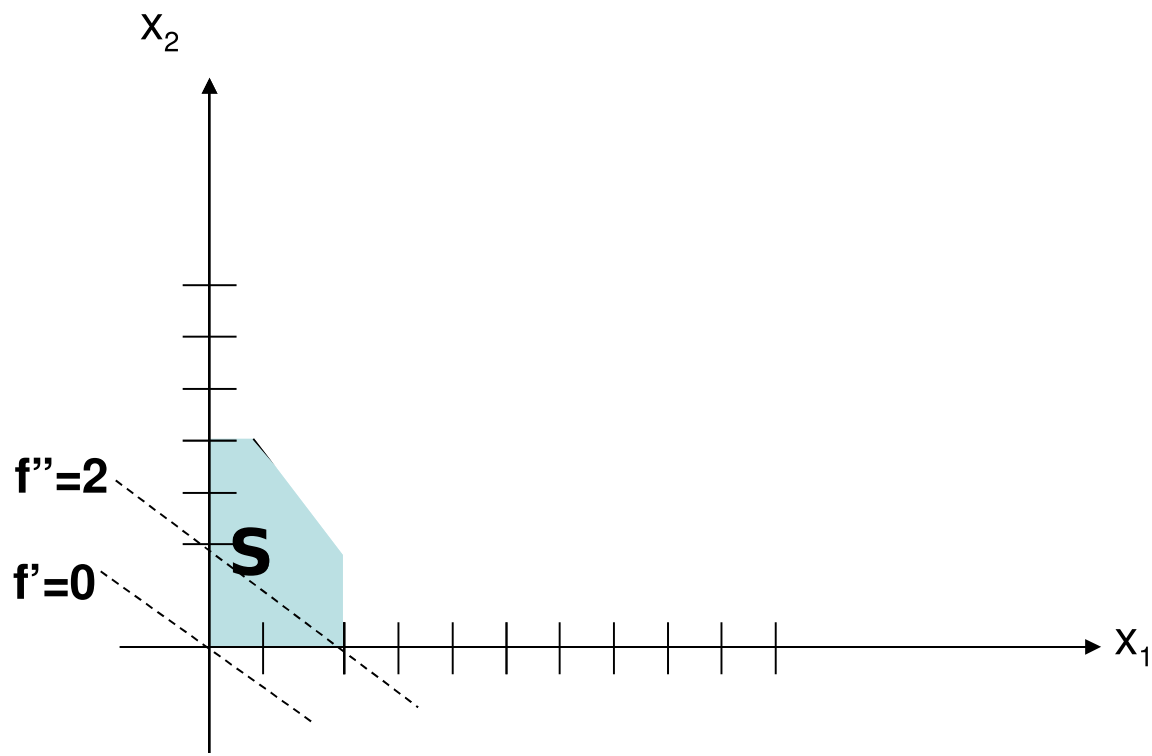
Solução Gráfica

- O vetor de coeficientes $(1,2)^T$ (gradiente de f, denotado por $\nabla f(x_1,x_2)$) da função objetivo é perpendicular à reta $x_1+2x_2=0$ e aponta no sentido em que f cresce
- Podemos observar pelo gráfico que existem pontos em S que atribuem valores maiores que 0 à função f. Logo, como o objetivo é maximizar, a solução factível $x'=(0\ 0)^T$ não é ótima



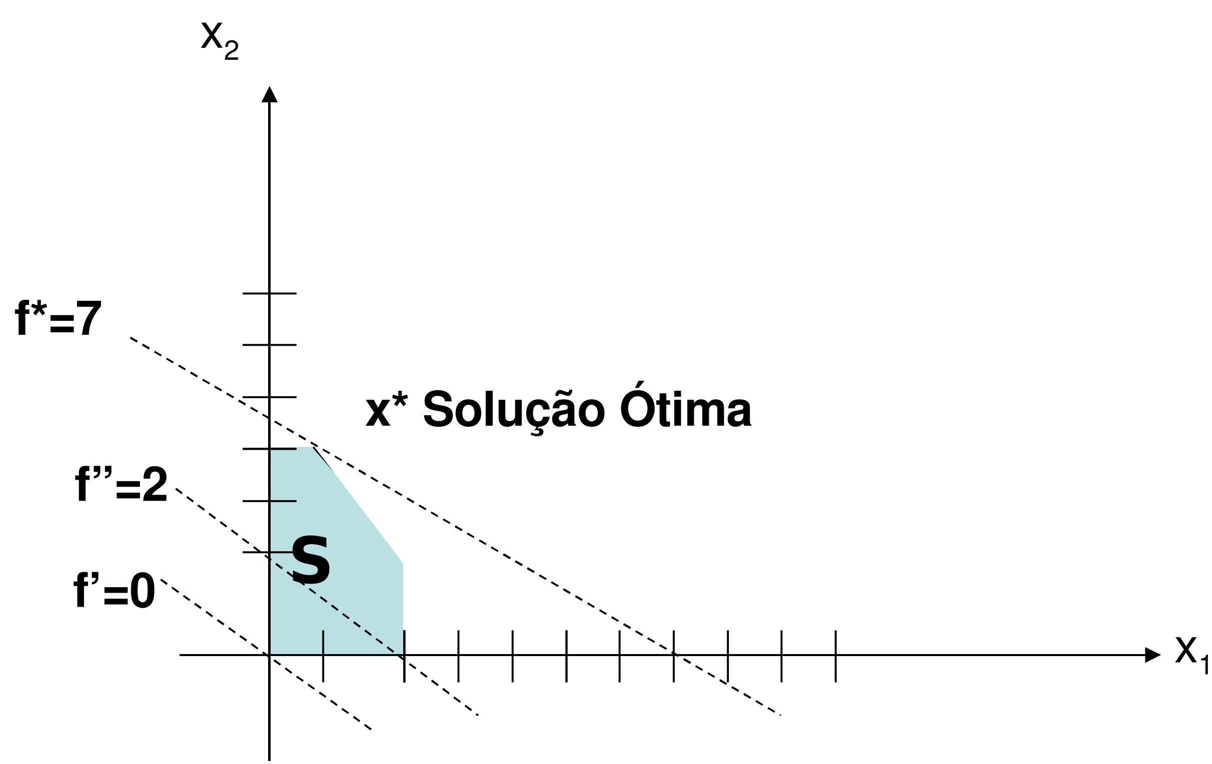
Solução Gráfica

- Considere outra solução factível $x''=(2\ 0)^T$ onde a função objetivo vale $f''=f(x'')=2$
- Existem outros pontos no gráfico que atribuem valores maiores que 2 à função objetivo. Logo, x'' não é a solução ótima



Solução Gráfica

- Continuando com o procedimento, nota-se que no extremo $x^*=(1\ 3)^T$ para o qual $f(x^*)=7$
- A curva de nível mostra que todos os pontos de S atribuem valores menores ou iguais que 7 à função objetivo
- Logo, para todo x em S, $f(x) \le 7 = f(x^*)$, então x^* é uma solução ótima



Solução Gráfica

- Observações:
  - Vértices (pontos extremos) são soluções de sistemas lineares
  - Se o gradiente da função objetivo for modificado, outro vértice pode ser uma solução ótima
  - Veja que: “se um problema de PL tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo”
  - Mas, atente para o fato que: “se uma solução for ótima, ela não é, necessariamente, um vértice”

Solução Gráfica

- Exemplo2:

  Max $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$

  s.a. $-3x_1+x_2<=2$

  $x_2<=3$

  $x_1+2x_2<=9$

  $3x_1+x_2<=18$

  $x_1>=0,\ x_2>=0$