Teoria Básica e o Método Simplex

Prof. Ricardo Santos

Teoria Básica do Método Simplex

- Por simplicidade, a teoria é desenvolvida para o problema de PL na forma padrão:

  Minimizar $f(x)=c^T x$

  s.a. $Ax=b$

  $x>=0$

- Considere o seguinte exemplo:

$x_1+x_2<=6$

$x_1- x_2<=4$

$3x_1+x_2>=3$

$x_1>=0,\ x_2>=0$

Teoria Básica do Método Simplex

- Considere o seguinte exemplo:

$x_1+x_2<=6$

$x_1-x_2<=4$

$3x_1+x_2>=3$

$x_1>=0$, $x_2>=0$

- Com a adição de variáveis de folga e excesso temos:

$x_3=6-(x_1+x_2)$

$x_4=4-(x_1-x_2)$

$x_5=(3x_1+x_2)-3$

Teoria Básica do Método Simplex

- Com a adição de variáveis de folga e excesso temos:

$x_3=6-(x_1+x_2)$, $x_3>=0$

$x_4=4-(x_1-x_2)$, $x_4>=0$

$x_5=(3x_1+x_2)-3$, $x_5>=0$

- O problema é então transformado na forma Ax=b, x>=0

$$x_1+x_2+x_3 \qquad = 6$$

$$x_1-x_2 \qquad +x_4 \qquad = 4$$

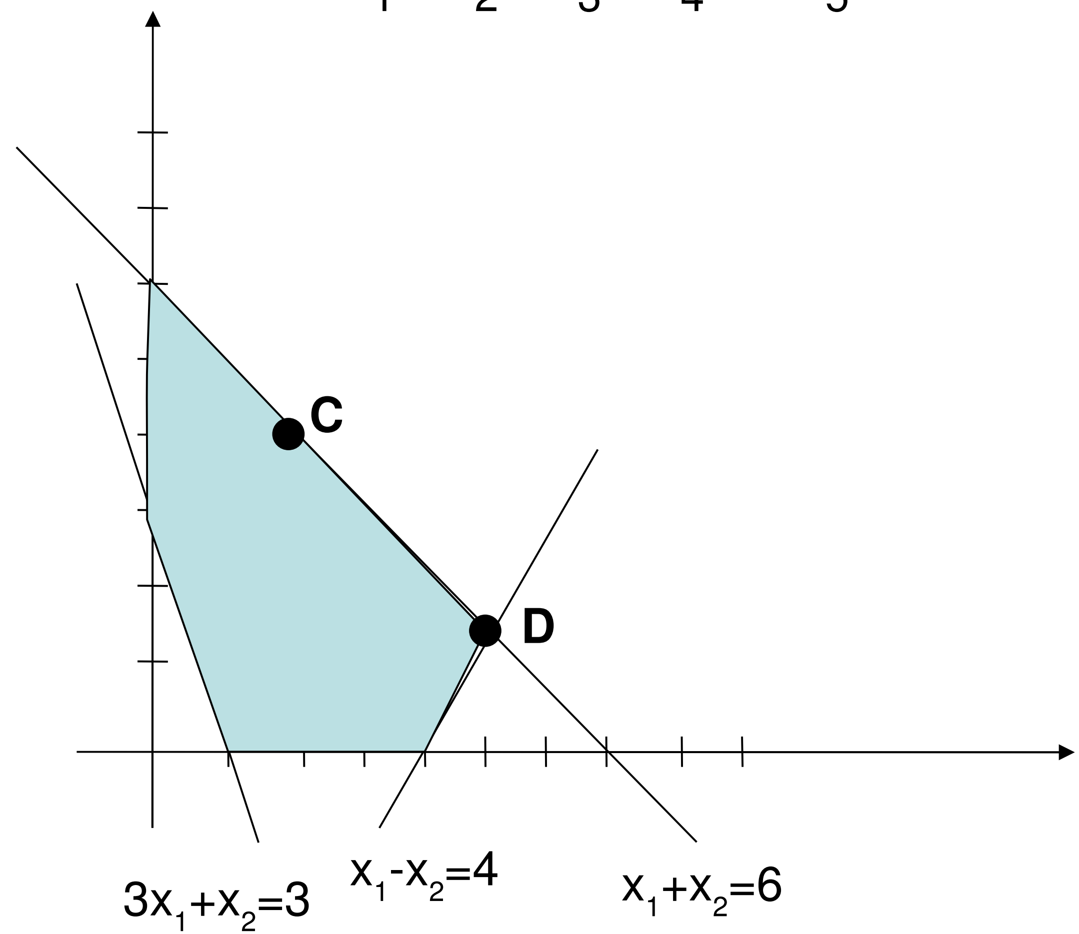
$$3x_1+x_2 \qquad -x_5 = 3$$

$x_1>=0$, $x_2>=0$, $x_3>=0$, $x_4>=0$, $x_5>=0$

- Importante: observe que a partir de x_1 e x_2 podemos determinar unicamente os valores de cada uma das variáveis

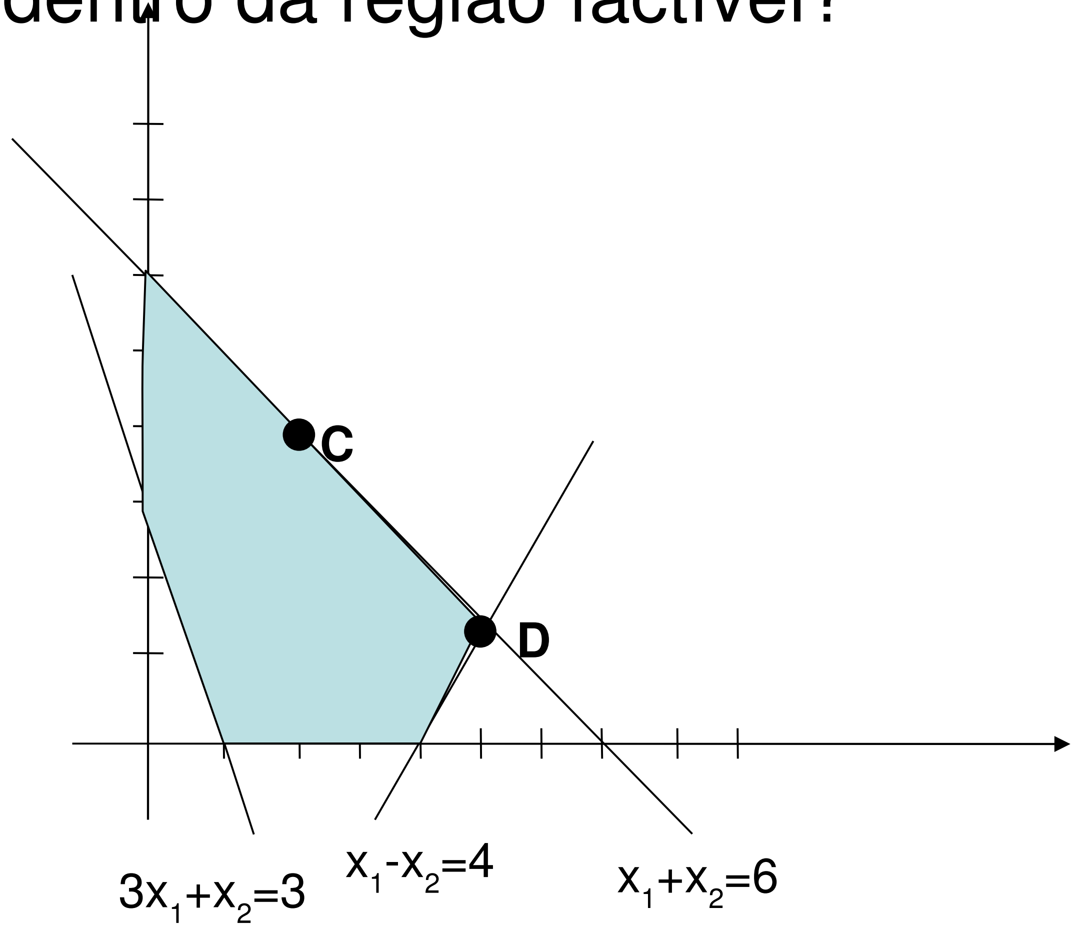
Teoria Básica do Método Simplex

- Observe a região factível obtida pelas restrições do sistema
  - Quais são os valores de x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 nos pontos D e C?



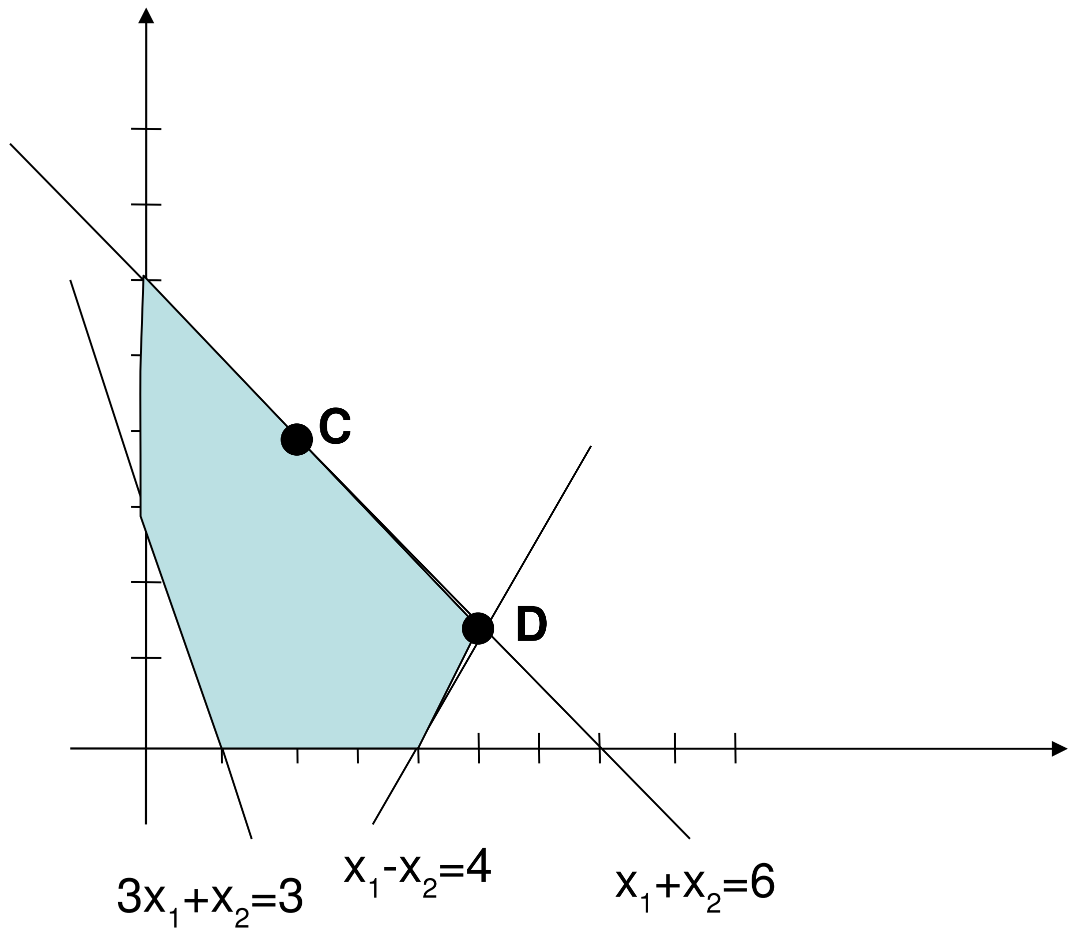
Teoria Básica do Método Simplex

- Se tivermos pontos E e F tal que:
  - Ponto E: $x_1=4$ e $x_2=5$
  - Ponto F: $x_1=6$ e $x_2=6$
- Os pontos estão dentro da região factível?



Teoria Básica do Método Simplex

- Na resolução gráfica, já observamos que podemos encontrar a solução ótima em um dos vértices da região factível
- Note que tais pontos são determinados pela intersecção de 2 retas, significando que duas variáveis se anulam
  - Observe o ponto D!



Teoria Básica do Método Simplex

- O sistema $Ax=b$ anterior tem $m=3$ (equações) e $n=5$ (variáveis)
  - 2 variáveis independentes
- Se considerarmos $x_3=0$ e $x_4=0$ obtemos um sistema m x m nas variáveis restantes (x_1, x_2 e x_5)
  - Resolvido com algum método de solução de sistemas lineares
- Pergunta: Podemos fixar quaisquer variáveis em zero e mesmo assim obteremos soluções factíveis? Exemplifique.

Teoria Básica do Método Simplex

- Se considerarmos fixar as variáveis x_3 e x_4, o sistema Ax=b pode ser equivalentemente reescrito como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_1 & -x_2 & +x_4 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & \\ x_1 & -x_2 & \\ 3x_1 & +x_2 & -x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Teoria Básica do Método Simplex

- Ou em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Teoria Básica do Método Simplex

- O sistema $Ax=b$ pode ser escrito como:
  $Ax=b \Leftrightarrow Bx_B+Nx_N=b$
- Se fixarmos $x_3=x_4=0$, então temos: $Bx_B=b$

Teoria Básica do Método Simplex

- Definição (partição básica): Uma reorganização nas colunas da matriz da seguinte forma: A=[B N]
- Em que:
  - $B_{m \times n}$, chamada matriz básica, é formada por m colunas da matriz A e é invertível, dada por $B=[a_{B1}\ a_{B2}\ ...\ a_{Bm}]$, isto é, B1, B2, ..., Bm são os índices das colunas da matriz A que pertendem a B, chamados índices básicos
  - $N_{m \times (n-m)}$, chamada matriz não-básica, é formada pelas n-m colunas restantes de A (isto é, colunas de A que não estão em B), dada por $N=[a_{N1}\ a_{N2}\ ...\ a_{N(n-m)}]$, isto é, N1, N2, ..., N(n-m) são os índices das colunas da matriz A que pertendem a N.
- Essa partição é chamada de partição básica e introduz uma partição no vetor $x=[x_B\ x_N]$

Teoria Básica do Método Simplex

- Essa partição é chamada de partição básica e introduz uma partição no vetor $x=[x_B\ x_N]$
- Em que:
  - x_B é chamado de vetor de variáveis básicas
  - x_N é chamado de vetor das variáveis não-básicas
- Considerando uma partição básica $A=[B\ N]$, o sistema $Ax=b$ pode ser reescrito de forma equivalente como

  $Ax=b \leftrightarrow [B\ N]\ [x_B\ x_N]=b$ ou $Bx_B+Nx_N=b$, de forma que:

  $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$ é a solução geral do sistema

Teoria Básica do Método Simplex

- Definição (solução básica): Considere uma partição básica
- A=[B N] e a seguinte solução obtida ao se fixar as n-m variáveis de x_N em zero, isto é: $x_B=B^{-1}b$ e $x_N=0$
- A solução obtida é chamada solução básica. Se $x_B=B^{-1}b>=0$ (todas as variáveis não-básicas) são não-negativas, diz-se que é uma solução básica factível
- Se $x_B=B^{-1}b>0$ (todas as variáveis são positivas), diz-se que a solução básica factível é não-degenerada

Teoria Básica do Método Simplex

- Considera-se novamente o exemplo onde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Se fixamos $x_3=x_4=0$, temos: $Bx_B=b$
  – cuja solução é: $x_B=[x_1\ x_2\ x_5]=[5\ 1\ 13]$

Teoria Básica do Método Simplex

- Considera-se novamente o exemplo onde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Se reorganizarmos x, temos que:
  - $x=[x_B\ x_N]=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]=[5\ 1\ 13\ 0\ 0]$
  - Veja que resolve o sistema Ax=b e não fere a condição de não-negatividade

Teoria Básica do Método Simplex

- Pela visualização gráfica podemos notar que os vértices de S correspondem às soluções básicas factíveis
- Uma região factível S tem um número finito de vértices, pois há um número finito de partições básicas dado por $C^n_m = n!/m!(n-m)!$
- Propriedade dos problemas de PL: Se um problema de PL tem solução ótima, então existe um vértice ótimo
  - Assim, se existe uma solução ótima, então existe uma solução básica factível ótima. Para isso:
    - Determinar todas as K soluções básicas factíveis
    - Determine a solução ótima xj tal que f(xj)=mínimo {f(xk), k=1, 2, ..., K}
  - K pode ser muito grande! Simplex inicia com uma solução básica factível e melhora essa solução a cada iteração