Algoritmo Simplex em Tabelas

Prof. Ricardo Santos

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Manipular problemas “pequenos” e compreender como o método funciona
- Considerar problema na forma padrão
- Coeficientes e função objetivo são organizados como:

x_1	x_2	...	x_n		variáveis
c_1	c_2	...	c_n	f	Coeficientes da func. objetivo
$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	**...**	$\mathbf{a}_n$	**b**	Coeficientes das restrições

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Dado o problema de PL:
  - Minimizar $f(x_1, x_2)=-x_1-2x_2$

s.a. $x_1+x_2<=6$

$x_1-x_2<=4$

$-x_1+x_2<=4$

$x_1<=0, x_2<=0$

- Como já sabemos, para transformar o problema anterior na forma padrão necessitamos inserir variáveis de folga:

$x_3=b_1-(x_1+x_2)=6-x_1-x_2$

$x_4=b_2-(x_1-x_2)=4-x_1+x_2$

$x_5=b_3-(-x_1+x_2)=4+x_1-x_2$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	**-2**	**0**	**0**	**0**	**f**
1	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	4
-1	1	0	0	1	4

- Observe que as colunas de x_3, x_4 e x_5 formam uma matriz identidade. x_3, x_4 e x_5 são chamadas de variáveis básicas
- x_1 e x_2 são variáveis não-básicas

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	**-2**	**0**	**0**	**0**	**f**
1	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	4
-1	1	0	0	1	4

- Fixando os valores de $x_1=x_2=0$, temos que:
  - $x_3=6$, $x_4=4$, $x_5=4$ e $f=0$
- Se mantermos $x_1=0$ e aumentarmos x_2 vemos que a função decresce. Logo, $x_1=x_2=0$ não é uma solução ótima

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Na estratégia simplex (alterar apenas uma variável não-básica), deve-se tomar o cuidado para manter a não-negatividade das variáveis de folga
- Considerando então $x_1=0$, podemos reescrever as variáveis de folga como:

  $x_3=b_1-(x_1+x_2)=6-x_2>=0$

  $x_4=b_2-(x_1-x_2)=4+x_2>=0$

  $x_5=b_3-(-x_1+x_2)=4-x_2>=0$

- Das desigualdades anteriores, notamos que apenas x_3 e x_5 limitam o crescimento de x_2
  - Como $a_{12}>0$, então $b_1-a_{12}x_2>=0$ implica $x_2<=b_1/a_{12}$, então $x_2<=6$
  - Como $a_{32}>0$, então $b_3-a_{32}x_2>=0$ implica $x_2<=b_3/a_{32}$, então $x_2<=4$
  - Observe que $a_{22}<0$, de forma que x_4 cresce junto com x_2
  - Se todos os $a_{i2}<=0$, i=1,2,...m então a variável x_2 cresceria indefinidamente de forma que f-> $-\infty$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Das observações anteriores, notamos que o maior valor para x_2 é 4 pois:
  - x_2=minimo(b1/a12, b3/a32)=minimo(6,4)=4
  - Com esse valor, segue que $x_5=4-x_2=4-4=0$. Assim, temos que:
  - Variáveis não-básicas: $x_1=0$, $x_2=4$
  - Variáveis básicas: $x_3=2$, $x_4=8$, $x_5=0$
  - Função objetivo: $f=-8$
- Se redefinirmos as variáveis não-básicas como aquelas com valores nulos e as variáveis básicas aquelas com valores positivos, temos que:
  - Variáveis não-básicas: $x_1=0$, $x_5=0$
  - Variáveis básicas: $x_3=2$, $x_4=8$, $x_2=4$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Se redefinirmos as variáveis não-básicas como aquelas com valores nulos e as variáveis básicas aquelas com valores positivos, temos que:
  - Variáveis não-básicas: $x_1=0$, $x_5=0$
  - Variáveis básicas: $x_3=2$, $x_4=8$, $x_2=4$
- Nesse caso, x_2 "entrou na base" e x_5 "saiu da base"
- As colunas das novas variáveis básicas não formam uma matriz identidade e, assim, a tabela simplex precisa ser atualizada
  - O que fizemos até agora (partir de uma solução factível e encontrar outra melhor) foi uma interação do método simplex

Algoritmo Simplex em Tabelas

- As operações realizadas em uma interação do simplex são:
  - Encontre variável não-básica que tenha o coeficiente negativo na função objetivo, por exemplo: x_k
  - Percorra a coluna na tabela simplex da variável x_k e, para cada coeficiente positivo (aik>0), calcule a razão bi/aik (valores que anulam a variável básica na linha i) e determine bl/alk=minimo(bi/aik tal que aik>0, i=1,...,m)
  - Com x_k=bl/alk, a variável básica na linha l se anula (isto é, sai da base). Se aik<0, i=1,...,m então f-> -∞ e, nesse caso, pare (não tem solução ótima finita)
  - Redefina as variáveis básicas e não-básicas e reconstrua a tabela simplex para essa nova solução básica

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Antes de atualizar a tabela simplex, precisamos “pivotar” (aplicar eliminação de Gauss) a tabela anterior para que os coeficientes das variáveis não-básicas formem uma matriz identidade
  - Assim, a coluna de x_2 deve ser transformada na 3a. coluna da matriz identidade
- Tomemos o elemento 4,2 (intersecção entre x_2 e x_5) como pivô e aplicamos operações elementares sobre a tabela:
  - 1o. Definimos multiplicadores para cada linha:
    - M12=m12/m42=-2/1=-2; M22=m22/m42=1/1=1; M32=m32/m42=-1/1=-1
  - 2o. Atualizamos cada linha i como:
    - Li=Li-(mi2.L4)

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	f+8
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

– Agora, observamos que a função objetivo é dada por

  - $f=-8-3x_1+2x_5$

– Se aumentarmos x_1 mantendo $x_5=0$, a função objetivo descreve na taxa de -3

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	f+8
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

– Mantendo $x_5=0$, temos que:

  - $x_3=2-2x_1>=0$
  - $x_4=8+0x_1>=0$

– Note ainda que o valor máximo para x_1=b1/a11=1

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	f+8
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

  – Note ainda que o valor máximo para x_1=b1/a11=1

  – Com x_1=1, a variável básica x_3 se anula.

    - Variáveis não-básicas: x_1=1, x_5=0

    - Variáveis básicas: x_3=0, x_4=8, x_2=4

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Como há necessidade de atualizar a tabela simplex, escolhemos o elemento 1,1 como pivô e aplicamos operações elementares sobre a tabela de forma que:
  - Variáveis não-básicas: $x_3=0$, $x_5=0$
  - Variáveis básicas: $x_1=10$, $x_4=8$, $x_2=4$

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	
0	0	3/2	0	3/2	f+11
1	0	1/2	0	-1/2	1
0	0	0	1	1	8
0	1	1/2	0	1/2	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Podemos reescrever as variáveis e função objetivo como:
  - $f=-11+3/2x_3+3/2x_5$, como $x_3=x_5=0$, então **f=-11**
  - $x_1=1-1/2x_3+1/2x_5$
  - $x_4=8-x_5$
  - $x_2=5$-

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	
0	0	3/2	0	3/2	f+11
1	0	1/2	0	-1/2	1
0	0	0	1	1	8
0	1	1/2	0	1/2	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Note que os custos relativos (1a. Linha) de x_3 e x_5 são positivos. Logo, qualquer atribuição em x_3 ou x_5 faz f(x)>=-11
- Então, f(x)=-11 é a solução ótima!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	3/2	0	3/2	f+11
1	0	1/2	0	-1/2	1
0	0	0	1	1	8
0	1	1/2	0	1/2	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Podemos dividir o algoritmo Simplex em Tabelas em 2 fases:
  - Fase I: Determinar a tabela simplex inicial
    - Matriz de coeficientes contém uma matriz identidade mxm e o vetor independente b
    - Função objetivo é escrita em termos de variáveis não-básicas, isto é, coeficientes das variáveis básicas são nulos
    - Iteração=0
  - Fase II: Determinação das soluções em cada iteração
    1. Determine o menor dos custos relativos ck=minimo entre os coeficientes das variáveis não-básicas
    2. Se ck>0, então pare. Senão, ck entra na base
    3. Se aik<=0, i=1,...,m, então pare (não existe solução ótima finita. Senão, determine: bl/alk=minimo(bi/aik tal que aik>0, i=1,...,m). Variável básica da linha l sai da base
    4. Atualize a tabela simplex (pivotamente no elemento (l,k). A variável xk passa a ser a variável básica na linha l
    5. Iteração=Iteração+1
    6. Retorne passo 1