Método Simplex
Resolução Algébrica

Prof. Ricardo Santos

Método Simplex

- A função objetivo f(x) pode ser expressa considerando a partição básica:
  - $f(x)=c^T x=$ $\begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N$
  - c^T_B: coeficientes das variáveis básicas na função objetivo
  - c^T_N: coeficientes das variáveis não-básicas na função objetivo
- Como $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$ então:
  - $f(x)=c^T_B\underbrace{(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)}_{x_B}+c^T_N x_N$ (1)
  - Valor da função objetivo em x*:
    - $f(x^*)= c^T_B x^*_B+c^T_N x^*_N= c^T_B(B^{-1}b)+c^T_N(0)=c^T_B B^{-1}b$

Método Simplex

- Definição 1(vetor multiplicador simplex): O vetor λ de ordem mx1, dado por
  - $\lambda^T = c^T_B B^{-1}$
  - é chamado de vetor multiplicador simplex (ou também, vetor de *variáveis duais*)
  - O vetor multiplicador simplex pode ser obtido pela resolução do sistema de equações lineares $\lambda B^T = c_B$, que é obtido ao se tomar a transposta de $\lambda^T = c^T_B B^{-1}$ e multiplicar ambos os termos da igualdade por B^T
  - Utilizando o vetor multiplicador simplex em (1) temos que:
    - $f(x)=f(\ )- c^T_B B^{-1} N x_N)+c^T_N x_N = f(x^*)- \lambda^T N x_N + c^T_N x_N = f(x^*)+ (c^T_N - \lambda^T N)x_N$
    - $f(x)=f(x^*)+ (c_{N1}-\lambda^T a_{N1})x_{N1}+ (c_{N2}-\lambda^T a_{N2})x_{N2}+...+ (c_{Nn-m}-\lambda^T a_{Nn-m})x_{Nn-m}$ (2)

Método Simplex

- Definição 2(custos relativos): Os coeficientes $c^*_{NJ}=(c_{NJ}-\lambda^T a_{NJ})$ das variáveis não-básicas da função objetivo (2) são chamados custos relativos ou custos reduzidos
  - $f(x)=f(x^*)+ c^*_{N1}x_{N1}+ c^*_{N2}x_{N2}+\ldots+c^*_{Nn-m}x_{Nn-m}$ (3)

- Propriedade 1 (condição de otimalidade): Condição uma partição básica A=[B N] em que a solução básica associada $x^*_B=B^{-1}b>=0$ (solução básica factível), e seja λ^T o vetor multiplicador simplex. Se $c_{NJ}-\lambda^T a_{NJ}>=0$ (todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.

Método Simplex

- Definição 3(estratégia simplex): Chamamos de estratégia simplex a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não-básicas por:

$$\begin{cases} x_{Nk}=\varepsilon >= 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{Nj}=0,\ j=1,2,,,,.n-m,\ j\neq k \end{cases}$$

- Ou seja, apenas uma variável não-básica, x_{Nk}, deixa de ser nula. Com isso, a função objetivo (3) passa a ser:
  - $f(x)=f(x^*)+ c^*_{N1}0+...+c^*_{Nk}x_{Nk}+...+c^*_{Nn-m}0$
  - $f(x)= f(x^*)+c^*_{Nk}\,\varepsilon<f(x^*)$
- Observe que a função objetivo decresce quando ε cresce
  - Isso justifica a escolha da variável não-básica a ser perturbada com o menor custo relativo

Método Simplex

- Definição 4(direção simplex): Chamamos de direção simplex o vetor $y=B^{-1}a_{Nk}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $By=a_{Nk}$
  - Observe que as variáveis básicas podem ser escritas como:
    - $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N=x^*_B-B^{-1}a_{Nk}\varepsilon=x^*_B-y\varepsilon$, onde $y=B^{-1}a_{Nk}$ (4)
- Reescrevendo a equação vetorial (4) em cada uma de suas coordenadas e considerando a não-negatividade das variáveis básicas
    - $x_{Bi}=x^*_{Bi}-y_i\varepsilon>=0$, $i=1,...,m$
- Assim,
  - Se $y_i<=0$, então $x_{Bi}>=0$, para todo $\varepsilon>=0$
  - Se $y_i>0$, como $x_{Bi}=x^*_{Bi}-y_i\varepsilon>=0$, então $\varepsilon=x^*_{Bi}/y_i$

Método Simplex

- Logo, o maior valor para ε é dado por
  - $\varepsilon^* = x^*_{Bl}/y_l$ =minimo(x^*_{Bi}/y_i tal que yi>0)

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase I:
  - Determine inicialmente a partição básica factível A=[B N]. A rigor, precisamos de dois vetores de índices básicos e não-básicos:
    - $(B_1, B_2, ..., B_m)$ e $(N_1, N_2, ..., N_{n-m})$
  - Os vetores das variáveis básicas e não-básicas são, respectivamente:
    - $x^T_B=(x_{B1}, x_{B2}, ..., x_{Bm})$ e $x^T_N= (x_{N1}, x_{N2}, ..., x_{Nn-m})$
  - Faça iteração=1
- Fase II: {início da iteração simplex}
  - Passo 1: {cálculo da solução básica}
    - $x^*_B=B^{-1}b$ //ou, equivalentemente, resolve o sistema $Bx_B=b$
    - $x^*_N=0$
  - Passo 2: {cálculo dos custos relativos}
    - 2.1) {vetor multiplicador simplex}
      - $\lambda^T= c^T_B B^{-1}$
    - 2.2) {custos relativos}
      - $c^*_{NJ}=c_{NJ}-\lambda^T a_{NJ}$ j=1,2, ..., n-m
    - 2.3) {determinação da variável a entrar na base}
      - c^*_{Nk}=minimo(c^*_{NJ}, j=1,2, ..., n-m) //a variável x_{Nk} entra na base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: {continuação}
  - Passo 3: {teste da otimalidade}
    - Se $c^*_{Nk}>=0$, então: pare //solução na iteração atual é ótima
  - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
    - $y=B^{-1}a_{Nk}$
  - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
    - Se $y<=0$, então: pare //problema não tem solução ótima finita. $f(x) \to -\infty$
    - Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima
      - $\varepsilon^*=x^*_{Bl}/y_l$ =minimo(x^*_{Bi}/y_i tal que $y_i>0$) //a variável x_{Bl} sai da base
  - Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}
    - Matriz básica nova: $B=[a_{B1}...a_{Bl-1}\ a_{Nk}\ a_{Bl+1}\ ...\ a_{Bm}]$
    - Matriz não-básica nova: $N=[a_{N1}...a_{Nk-1}\ a_{Bl}\ a_{Nk+1}\ ...\ a_{Nn-m}]$
    - iteração=iteração+1
    - Retorne ao passo 1

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Exemplo:
  - Minimizar $f(x_1,x_2)=-x_1-2x_2$
    - $x_1+x_2<=6$
    - $x_1-x_2<=4$
    - $-x_1+x_2<=4$
    - $x_1>=0,\ x_2>=0$

- Após introduzir as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5, temos o problema na forma padrão
- Na Fase I, obtemos uma partição básica factível:
  - $(B_1, B_2, B_3)=(3, 4, 5)$, $(N_1, N_2)=(1, 2)$,
  - Ou seja, B=I. Fazendo $(x_1, x_2)=(0,0)$, temos (trivialmente) os valores das variáveis básicas

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	B_1=3	B_2=4	B_3=5	N_1=1	N_2=2	b
[B | N]	1	0	0	1	1	6
	0	1	0	1	-1	4
	0	0	1	-1	1	4
[c_B | c_N]	0	0	0	-1	-2	f=0

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração
  - Passo 1: {cálculo da solução básica} = $x_B=(x_3, x_4, x_5)$
    - Resolver o sistema $Bx_B=b$
      - $x_B=(6, 4, 4)$
    - Avaliação da função objetivo:
      - $f(x)=c_{B1}x_{B1}+ c_{B2}x_{B2} + c_{B3}x_{B3}=0*6+0*4+0*4=0$
  - Passo 2: {cálculo dos custos relativos}
    - 2.1) {vetor multiplicador simplex}:($c_B=(c_{B1},c_{B2},c_{B3})=(c_3,c_4,c_5)=(0, 0, 0)$).
      - Solução do sistema $B^T\lambda=c_B$ é $\lambda^T=(0,0,0)$
    - 2.2) {custos relativos}: ($N_1=1$, $N_2=2$)
      - $c_1=c_1- \lambda^T a_1=-1-(0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=-1$,
      - $c_2=c_2- \lambda^T a_2=-2-(0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=-2$, k=2. (variável $x_{N2}=x_2$ entra na base)
    - 2.3) {determinação da variável que entra na base}
      - Como $c_2=c_{N2}=\text{minimo}\{c_{Nj}, j=1,2\}=-2<0$, então a variável x_2 entra na base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: $1^{a.}$ Iteração
  - Passo 3: {teste de otimalidade}
    - Como os custos relativos (c_1=-1, c_2=-2)são negativos, a solução atual não é ótima!
  - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
    - Resolver o sistema $By=a_2$ e obtenha y= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    - O vetor y mostra como as variáveis básicas são alteradas: $x_B=x_B-y\varepsilon$
    - As variáveis não-básicas (x_1 e x_2) se alteram conforme a estratégia simplex: $x_1=0$ e $x_2=\varepsilon$
  - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
    - $\varepsilon^*=\text{minimo}(x_{B1}/y_1, x_{B3}/y_3)=\text{minimo}(6/1, 4/1)=4= x_{B3}/y_3$
    - $x_{B3}=x_5$ sai da base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração
  - Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}
    - $(B_1, B_2, B_3)=(3, 4, 2)$, $(N_1, N_2)=(1, 5)$,
    - {novo valor da função objetivo: $f(x)=f(x^*)+c_{Nk}\varepsilon^*=0-2*4=-8$}
    - Nova Tabela:

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	$B_1=3$	$B_2=4$	$B_3=2$	$N_1=1$	$N_2=5$	b
[B | N]	1	0	1	1	0	6
	0	1	-1	1	0	4
	0	0	1	-1	1	4
$[c_B \mid c_N]$	0	0	-2	-1	0	f=-8

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração
  - Passo 1:
    - Solução básica: $x_B=(x_3, x_4, x_2)$
    - Resolver sistema $Bx_B=b$ e obter $x^*_B=$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - Passo 2:
    - 2.1) {vetor multiplicador simplex}
      - $(c_B=(c_{B1},c_{B2},c_{B3})=(c_3,c_4,c_2)=(0, 0, -2))$.
      - Resolver sistema $B^T\lambda=c_B$ é $\lambda^T=(0, 0, -2)$
    - 2.2) {custos relativos}: $(N_1=1, N_2=5)$
      - $c_1=c_1- \lambda^T a_1=-1-(0\ 0\ -2)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$=-3$, $k=1$, x_1 entra na base
      - $c_5=c_5- \lambda^T a_5=0-(0\ 0\ -2)$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$=2$,
    - 2.3) {determinação da variável que entra na base}
      - Como $c_1<0$, solução básica não é ótima e x_1 entra na base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração
  - Passo 3: {teste de otimalidade}
    - Como há custos relativos (c_1=-3, c_5=2) negativos, a solução atual não é ótima!
  - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
    - Resolver o sistema By=a_1 e obtenha y= $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
    - O vetor y mostra como as variáveis básicas são alteradas: $x_B=x_B-y\varepsilon$
    - As variáveis não-básicas (x_1 e x_5) se alteram conforme a estratégia simplex: $x_5=0$ e $x_1=\varepsilon$
  - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
    - Como somente $y_1>0$, então
    - $\varepsilon^*=\text{minimo}(x_{B1}/y_1)=\text{minimo}(2/2)=1$
    - $x_{B1}=x_3$ sai da base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração
  - Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}
    - $(B_1, B_2, B_3)=(1, 4, 2)$, $(N_1, N_2)=(3, 5)$,
    - {novo valor da função objetivo: $f(x)=f(x^*)+c_{Nk}\varepsilon^*=-8-3*1=-11$}
    - Nova Tabela:

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	$B_1=1$	$B_2=4$	$B_3=2$	$N_1=1$	$N_2=5$	b
[B | N]	1	0	1	1	0	6
	1	1	-1	0	0	4
	-1	0	1	0	1	4
$[c_B \mid c_N]$	-1	0	-2	0	0	f=-11

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª Iteração
  - Passo 1:
    - Solução básica: $x_B=(x_1, x_4, x_2)$
    - Resolver sistema $Bx_B=b$ e obter $x^*_B= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$
  - Passo 2:
    - 2.1) {vetor multiplicador simplex}
      - $(c_B=(c_{B1},c_{B2},c_{B3})=(c_1,c_4,c_2)=(-1, 0, -2))$.
      - Resolver sistema $B^T\lambda=c_B$ é $\lambda^T= (-3/2, 0, -1/2)$
    - 2.2) {custos relativos}: $(N_1=3, N_2=5)$
      - $c_3=c_3- \lambda^T a_3=0-(-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =3/2,$
      - $c_5=c_5- \lambda^T a_5=0- (-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =1/2,$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração
  - Passo 2:
    - 2.1) {vetor multiplicador simplex}
      - $(c_B=(c_{B1},c_{B2},c_{B3})=(c_1,c_4,c_2)=(-1, 0, -2))$.
      - Resolver sistema $B^T\lambda=c_B$ é $\lambda^T= (-3/2, 0, -1/2)$
    - 2.2) {custos relativos}: $(N_1=3, N_2=5)$
      - $c_3=c_3- \lambda^T a_3=0-(-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=3/2,$
      - $c_5=c_5- \lambda^T a_5=0- (-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1/2,$
    - 2.3) {determinação da variável que entra na base}
      - Como minimo$\{c_{Nj}$, j=1,2$\}=1/2>0$, segue-se que a solução atual
        - » $x^*_B=\begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix}$ e $x^*_N=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ou $x=\begin{pmatrix}1\\5\\0\\8\\0\end{pmatrix}$