Programação Inteira

Prof. Ricardo Santos

Introdução

- Um problema com variáveis inteiras e reais é denominado problema de Programação Inteira Mista (PIM) quando tem a seguinte forma:

$$\text{PIM} \quad \begin{aligned} & z = \max\ cx + dy \\ & Ax + Dy <= b \\ & x \in R^n_+,\ y \in Z^p_+ \end{aligned}$$

- Onde: **A** é uma matriz (mxn), D é uma matriz (mxp), c é um vetor (1xn), d é um vetor (1xp), b é um vetor (mx1), x é um vetor (nx1) e y é um vetor (px1)
- R^n_+ representa o espaço dos vetores com n componentes reais e Z^p_+ representa o espaço dos vetores com p componentes inteiras não-negativas

Introdução

- Quando todas as variáveis são inteiras, tem-se um problema de programação inteira (PI):

$$\text{PI} \qquad \begin{aligned} & z = \max cx \\ & Ax <= b \\ & x \in Z^n_+ \end{aligned}$$

- Se todas as variáveis assumem valores 0 ou 1, tem-se um problema de programação 0-1 ou binária (PB), escrito como:

$$\text{PB} \qquad \begin{aligned} & z = \max cx \\ & Ax <= b \\ & x \in B^n \end{aligned}$$

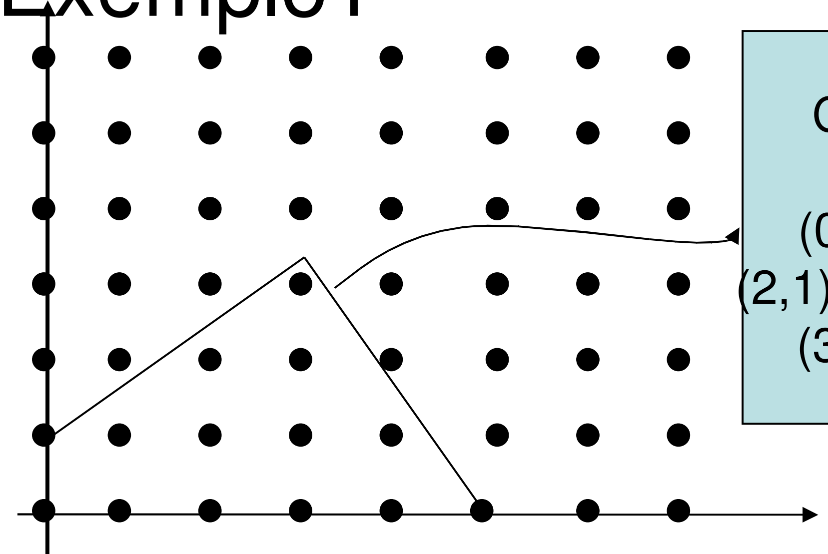
- Onde B^n representa o espaço dos vetores com n componentes binárias

Exemplos

- Exemplo1: Programação inteira:

$$
\begin{aligned}
&z = \max\ 10x_1 + 6x_2 \\
\text{PI} \qquad &9x_1 + 5x_2 <= 45 \\
&-4x_1 + 5x_2 <= 5 \\
&x \in Z^2_+
\end{aligned}
$$

- Figura representando o conjunto de soluções factíveis do Exemplo1



Região Factível.
Conjunto de soluções factíveis é X={(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (5,0) }

Exemplos

- No exemplo anterior, observe que ao mover na direção do gradiente da função (5,3) obtemos a solução ótima no ponto (5,0) com z=50
- Exemplo2: Programação Binária

$$z = \max\ 2x_1 + 3x_2$$

PB $$6x_1 + 8x_2 <= 10$$

$$x \in B^2$$

- O conjunto de soluções factíveis para o Exemplo2 é dado por X={(0,0), (1,0), (0,1)}. A solução ótima está no ponto x=(0,1) com z=3

Exemplos

- Exemplo3: Programação Inteira Mista:

$$z = \max\ 10x_1 + 6x_2$$

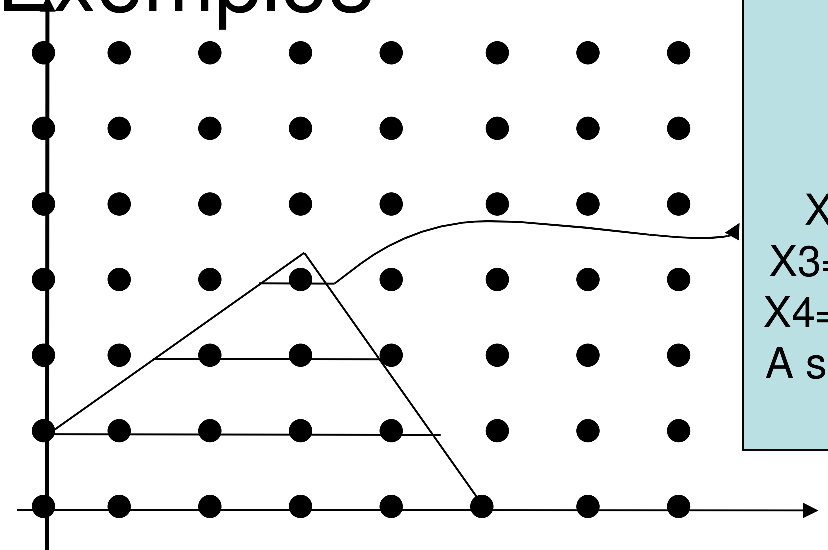
PIM

$$9x_1 + 5x_2 <= 45$$

$$-4x_1 + 5x_2 <= 5$$

$$x_1 \in R^1_+,\ x_2 \in Z^1_+$$

- Figura representando o conjunto de soluções factíveis do Exemplo3



Região Factível.
Conjunto de soluções factíveis é
X1={(x1,0),0<=x1<=5}
X2={(x1,1),0<=x1<=4 4/9}
X3={(x1,2),1 1/4<=x1<=3 8/9}
X4={(x1,3),2 1/2<=x1<=3 1/3}.
A solução ótima é x=(3 1/3,2)
com valor z=51 1/3

Relaxação Linear

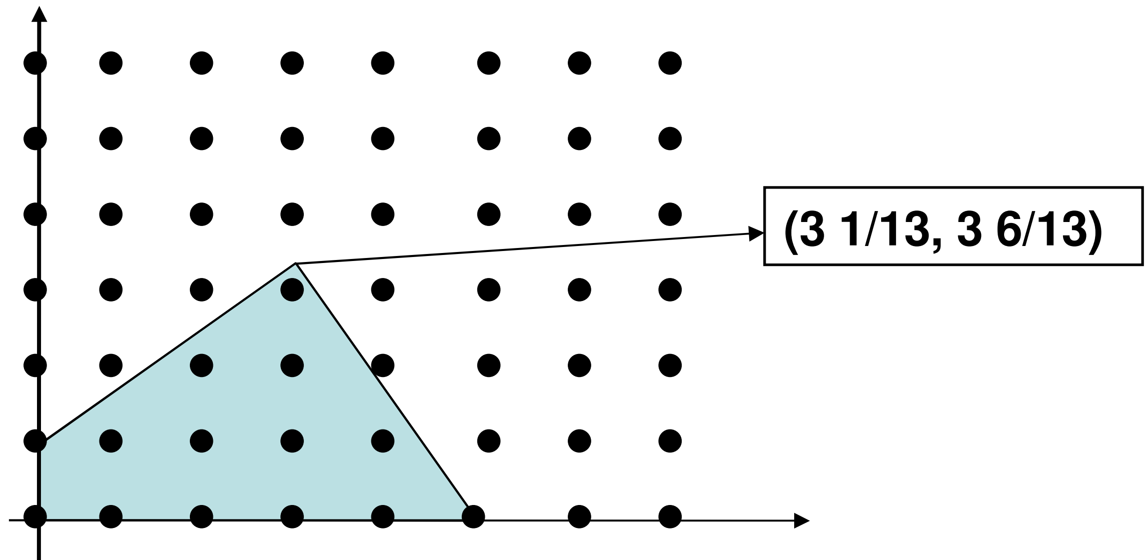
- Considere o problema de PL do Exemplo1 quando a condição de integralidade é relaxada, isto é, $x \in R^2_+$

$$
\text{PL} \qquad \begin{aligned} z = \max\ & 10x_1 + 6x_2 \\ & 9x_1 + 5x_2 <= 45 \\ & -4x_1 + 5x_2 <= 5 \\ & x \in R^2_+ \end{aligned}
$$

- O problema de PL é chamado de relaxação linear do problema de PI

Relaxação Linear

- A Figura a seguir mostra que a solução ótima de PI está no ponto x=(3 1/13, 3 6/13) com valor z=51 7/13
- Note que x está bem distante da solução ótima inteira (5,0). Como decorrência, a solução de PI arredondada (3,3) também está distante da solução ótima inteira



Relaxação Linear

- Sejam X_{PI}, X_{PIM}, X_{PL} os conjuntos de soluções factíveis de PI, PIM e PL, respectivamente.
- Como $Z^n_+ \subset R^n_+$, segue-se que $X_{PI} \subset X_{PL}$ e $X_{PIM} \subset X_{PL}$
- Portanto, o valor de z na solução ótima de PL é um limitante superior para o valor de z da solução ótima de PI e PIM

Modelagem com Variáveis Binárias

- Implicações "se-então"
  - Custo Fixo: suponha que o custo de produção K de um item consiste em um custo fixo s adicionado de um custo linear variável com taxa c.
  - Defina a variável x=qtde produzida do item
  - Para representar a função K(x) de forma linear com uma variável inteira, seja M um limitante superior da produção do item e considere a variável binária y tal que y=0 implica x=0 ou, equivalentemente, x>0 implica y=1. K pode ser reescrito como:

$$K = sy + cx$$

$$x <= My$$

Modelagem com Variáveis Binárias

- Implicações "se-então"
  - Produção de itens: considere a situação em que, se o produto 1 é fabricado, então o produto 2 também deve ser fabricado:
    - x_1=qtde produzida do item 1
    - x_2=qtde produzida do item 2
  - Seja y uma variável binária tal que
    - $y = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1>0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - Essa condição é expressa pela desigualdade
    - $x_1 <= My$ onde M é limitante superior da produção de x_1

Modelagem com Variáveis Binárias

- Implicações “se-então”
  - Seja y uma variável binária tal que
    - $y \begin{cases} 1 & \text{se } x_1>0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - Essa condição é expressa pela desigualdade
    - $x_1 \leq My$ onde M é limitante superior da produção de x_1
  - **Devemos expressar a condição que y=1 implica $x_2>0$**
    - **$x_2 \geq my$ onde m é um limitante inferior para a produção de x_2**

Modelagem com Variáveis Binárias

- Restrição ativada ou desativada
  - Seja a desigualdade

    $$f(x_1, x_2, ..., x_n)<=0$$

  - Defina uma variável binária y tal que y=1 implica que a desigualdade anterior é satisfeita ou está ativada

    $$f(x_1, x_2, ..., x_n)<=M(1-y)$$

  - Onde M é um número grande. Se y=0 então a restrição é desativada. Isto é, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ pode assumir qualquer valores até seu limite superior M

Modelagem com Variáveis Binárias

- Relações Lógicas
  - Variáveis binárias são usadas para relações lógicas
  - Suponha que existam 5 tipos de investimento financeiro, x_j é a variável binária de decisão tal que
  - $x_j = \begin{cases} 1 & \text{Se o investimento } j \text{ é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Modelagem com Variáveis Binárias

- Relações Lógicas
  - Considere as seguintes restrições representativas
    - No máximo três investimentos são selecionados
      - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 <= 3$
    - Exatamente um investimento é selecionado
      - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$
    - O investimento 1 ou o investimento 2 é selecionado
      - $x_1 + x_2 >= 1$
    - Se o investimento 2 é selecionado, então o investimento 1 o será
      - $x_2 <= x_1$
    - Se os investimentos 2, 3 ou 4 são selecionados, então o investimento 1 também o será
      - $x_2 + x_3 + x_4 <= 3x_1$ ou $x_2 <= x_1$ e $x_3 <= x_1$ e $x_4 <= x_1$

Modelagem com Variáveis Binárias

- Representação de valores discretos
  - Considere um problema em que uma variável x só pode assumir valores do conjunto discreto {4, 6, 8, 12, 20, 24}
  - Para representar essa condição, defina as variáveis binárias y_i, i=1,..., 6 e as restrições
    - $x=4y_1+6y_2+8y_3+12y_4+20y_5+24y_6$
    - $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=1$

Formulação de Problemas Clássicos

- Linguagens algébricas
  - Criadas a partir de 1980
  - Permitem ao usuário escrever modelos genéricos de programação linear (e não-linear) em um formato parecido com a notação algébrica
  - Modelo é separado dos dados e independe do tamanho do problema
  - Alguns exemplos são: GAMS, AMPL, MPL, AIMMS, OPL, MOSEL e LINGO

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Seleção de Projetos/Mochila 0-1
  - Considere n projetos e um capital b para investimento.
  - O projeto j tem custo a_j e um retorno esperado p_j.
  - O problema consiste em selecionar os projetos que maximizam o retorno total esperado sem ultrapassar o limite de capital
    - $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se o projeto j é selecionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Seleção de Projetos/Mochila 0-1
  - O problema é formulado como:

max $$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x \in B^n$$

- Este problema é denominado problema da mochila devido à analogia do problema que envolve a decisão de quais itens carregar em uma mochila sem exceder um dado limite de peso

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Múltiplas Mochilas
  - Considere n itens que devem ser colocados em m mochilas de capacidades distintas b_i, i=1, ..., m
  - Cada item j tem uma lucratividade p_j e um peso w_j
  - O problema consiste em selecionar m subconjuntos distintos de itens, tal que cada subconjunto ocupe uma capacidade de, no máximo, b_i e o lucro total seja maximizado
    - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o item j é colocado na mochila i} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Múltiplas Mochilas
  - O problema é formulado como:
    - max $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le b_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le 1, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x \in B^{mn}$$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Empacotamento em Mochilas
  - Também conhecido como bin-packing
  - Deseja-se determinar o número mínimo de mochilas de mesma capacidade b que empacotem n itens de peso w_j, $j=1,\dots,n$
  - Dada as variáveis
    - $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se a mochila } i \text{ é usada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
    - $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o item } j \text{ é colocado na mochila } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Empacotamento em Mochilas
  - O problema é formulado como:
    - min $$\sum_{j=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq b y_i, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$x \in B^{mn}, y \in B^{n}$$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Unidimensional
  - O problema consiste em cortar barras disponíveis de tamanho único L para a produção de m tipos de itens com tamanhos l_1, l_2, ..., l_m, e demandas, b_1, b_2, ..., b_m, respectivamente
  - O objetivo é minimizar o número de barras usadas, dado um limitante superior de barras disponíveis
  - Dada as variáveis
    - $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se a barra i é usada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
    - x_{ij}= número de vezes que o item j é cortado na barra i

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Unidimensional
  - O problema é formulado como:
    - min $$\sum_{j=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq b_j, \qquad j = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_j x_{ij} \leq L y_i, \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$y \in B^n, x \in Z^{mn}$$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Unidimensional
  - O problema de corte unidimensional é similar ao empacotamento de mochilas
    - Deseja-se minimizar o número de objetivos com um dado tamanho e, se o objetivo i é usado, os itens colocados ou cortados nesse objeto não podem exceder seu tamanho
  - As soluções inteiras de corte unidimensional que satisfazem a restrição da mochila de forma máxima são chamadas padrões de corte ou de empacotamento
  - Para L=11, m=4, $l_1=2$, $l_2=3$, $l_3=3,5$, $l_4=4$
  - Seja n o número total de possíveis padrões de corte, e para cada padrãode corte j, j=1, 2, ...,n associe um vetor m-dimensional $a_j=(a_{1j}, ..., a_{mj})$ tal que:
    - A_{ij}=número de barrras do tipo i no padrão j

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Bidimensional
  - O problema consiste em cortar uma placa em um número de peças retangulares de modo a otimizar algum objetivo, por exemplo, maximizar a utilização da placa
  - Considere uma placa retangular (L, W) de comprimento L e largura W, cortada em m tipos de peças retangulares menores
  - Peça do tipo i tem tamanho (l_i, w_i) e valor v_i. P e Q são os números mínimo e máximo de peças do tipo i que podem ser cortadas da placa
    - $0<=P_i<=Q_i$, i=1, ...,m
  - L, W, l_i, w_i, i=1, ...,m são inteiros
  - Os cortes são ortogonais a um lado da placa
  - A orientação das peças é fixa

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Bidimensional
  - Defina
    - $a_{ilwrs} = \begin{cases} 1 & \text{se a peça do tipo i, quando cortada com vértice inferior à esquerda com coord (l,w) exclui o ponto (r,s)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - Para impedir contagem dupla quando duas peças são adjacentes:
    - $a_{ilwrs} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le l \le r \le l+l_i-1 \le L-1 \text{ e } 0 \le w \le s \le w+w_i-1 \le W-1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - Seja X={0, 1, ..., L-1} o conjunto de comprimentos para localização do vértice inferior à esquerda do corte das peças e Y={0,1,...,W-1} o conjunto correspondente para as larguras

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Corte Bidimensional
  - Defina as variáveis
    - $x_{ilw} = \begin{cases} 1 \text{ se a peça do tipo i é cortada com seu vértice inferior à esquerda no ponto (l, w), tal que } 0 \leq l \leq L\text{-}l_i \text{ e } 0 \leq w \leq W\text{-}w_i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$
  - O problema é formulado como:
    - max $\sum_{i=1}^{m} \sum_{l \in X} \sum_{w \in Y} v_i x_{ilw}$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l \in X} \sum_{w \in Y} a_{ilwrs} x_{ilw} \leq 1, r \in X, s \in Y$$

$$P_i \leq \sum_{l \in X} \sum_{w \in Y} x_{ipq} \leq Q_i, i = 1, \ldots, m$$

$$x \in B^{m|X||Y|}$$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Roteamento de Veículos
  - Grafo orientado completo G(N,E) em que $N=C \cup \{0,n+1,$ $C=\{1,...,n\}$ é o conjunto de nós que representam os clientes
  - 0,n+1 são os nós que representam os depósitos
  - O conjunto $E=\{(i,j): i,j \in N, i \neq j, i \neq n+1, j \neq 0\}$ corresponde aos arcos associados conexões entre nós
  - Nenhum arco termina no nó 0 e nenhum arco começa no nó n+1
  - Todas as rotas começam em 0 e terminam em n+1
  - Um custo c_{ij} e um tempo t_{ij} estão associados a cada arco (i,j)
  - O tempo de viagem t_{ij} inclui o tempo de serviço do cliente i
  - Cada cliente i tem uma demanda d_i
  - Um conjunto K de veículos idênticos, cada $k \in K$ possui capacidade Q está no depósito

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Roteamento de Veículos
  - O objetivo é minimizar o custo total de viagens, sujeito às seguintes restrições:
    - Cada rota inicia e termina no depósito
    - Cada cliente pertence somente a uma rota
    - A demanda total de uma rota não pode exceder a capacidade Q do veículo
    - O tempo de viagem de uma rota não pode exceder o limite D
  - Defina
    - $x_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ se o veículo k percorre o arco (i,j), } \forall k \in K, \forall (i,j) \in E \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$

Formulação de Problemas Clássicos

- Problema de Roteamento de Veículos
  - min $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ijk}$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \forall i \in C$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \forall k \in K$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \forall h \in C, \forall k \in K$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q, \forall k \in K \qquad \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, S \subset C, 2 \leq |S| \leq \frac{n}{2,} \forall k \in K$$

$$x \in B^{K|E|}$$