Programação Inteira

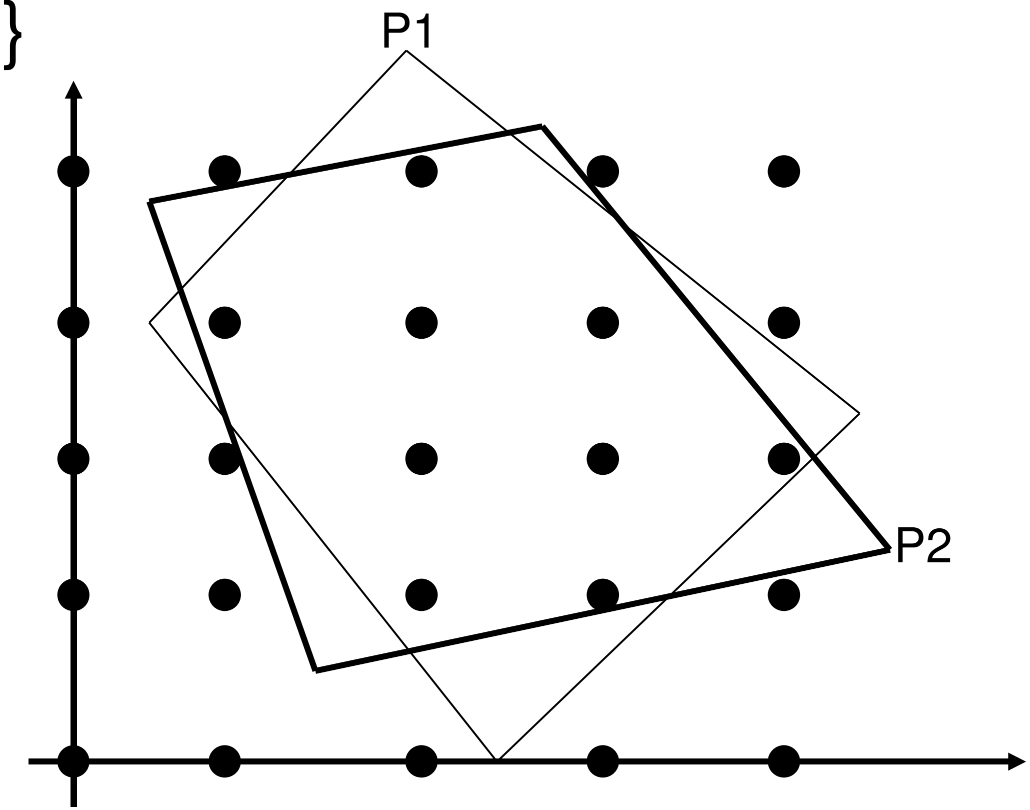
Prof. Ricardo Santos

Formulações Alternativas

- Dado um problema P, podem existir diversas formulações para esse problema e algumas delas podem ser melhores que outras
- Definição 1: Um subconjunto de Rn descrito por restrições lineares $P=\{x \in R^n: Ax<=b\}$ é um poliedro
- Definição 2: Um poliedro $P \subset R^{n+p}$ é uma formulação para um conjunto $X \subset Z^n \times R^p$ se e somente se $X=P \cap (Z^n \times R^p)$

Formulações Alternativas

- Exemplo: A figura a seguir apresenta duas formulações distintas P1 e P2 para o conjunto
  - X={(1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,2)}



Formulações Alternativas

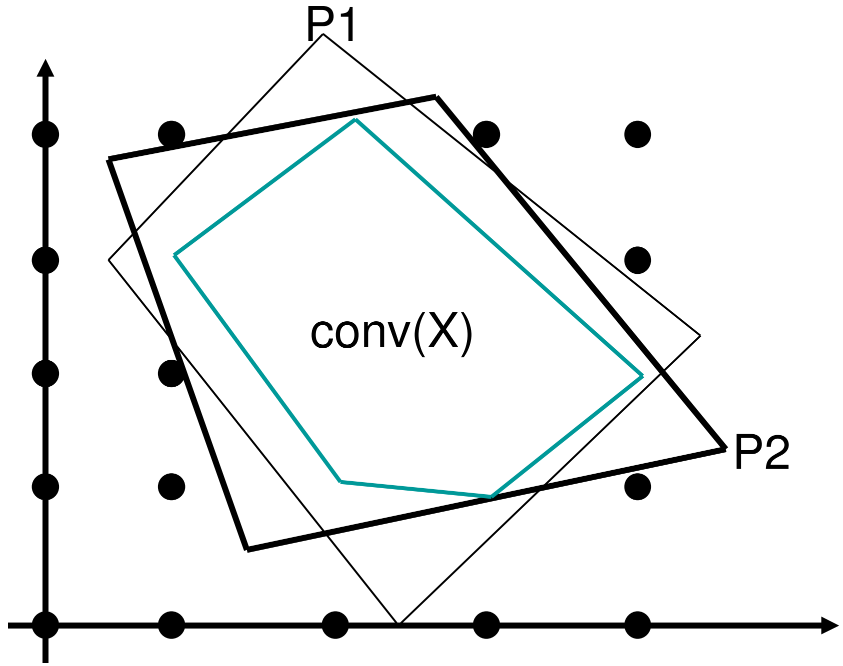
- Definição 3: Um conjunto $X \subset R^n$ é chamado de conjunto convexo se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e todo número real α, $0 < \alpha < 1$, o ponto $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in X$
- A interpretação geométrica desta definição é que, se um conjunto é convexo, então, dados dois pontos no conjunto, todo ponto no segmento de reta que liga esses dois pontos também é um elemento do conjunto

Formulações Alternativas

- Definição 4: Dado um conjunto $X \subset R^n$, a **envoltória convexa** (*convex hull*) de X, representada por conv(X), é definida como a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm X, isto é, o menor conjunto convexo que contém X

Formulações Alternativas

- A Figura a seguir mostra a envoltória convexa do exemplo anterior



- A envoltória convexa corresponde à combinação convexa dos pontos $x_1=(1,3)$, $x_2=(2,1)$, $x_3=(2,4)$, $x_4=(3,1)$, $x_5=(4,2)$, isto é,
- conv(X)= $\left\{ \sum_{j=1}^{5} \alpha_j x_j, \sum_{j=1}^{5} \alpha_j = 1, \alpha \geq 0, \forall j \right\}$

Formulações Alternativas

- Note que as soluções ótimas dos exemplos de PI e PIM são pontos extremos das envoltórias convexas dos conjuntos de soluções factíveis de PI e PIM, respectivamente.
- Pode-se expressar o problema de PIM como o problema de programação linear

$$z=\max c^T x+d^T y$$

$$\tilde{A}x+Dy<=b$$

$$x \in R^n_+,\ y \in R^p_+$$

- Em que $\{(x,y): \tilde{A}x+Dy<=b,\ x \in R^n_+,\ y \in R^p_+\}=\text{conv}\{(x,y): Ax+Dy<=b,\ x \in R^n_+,\ y \in Z^p_+\}$
- A partir dessa caracterização de PIM é possível definir a melhor de duas formulações P1 e P2 para um dado conjunto X $\subset$ Rn.
  - Como $X \subseteq \text{conv}(X) \subseteq P$, para qualquer formulação P, P1 é uma formulação melhor que P2 se $P1 \subseteq P2$

Formulações Alternativas

- A determinação de conv(X) é tão difícil quanto resolver PIM e os métodos de resolução *branch-and-bound* e *branch-and-cut* operam de forma a fazer com que a solução ótima de PIm seja a solução ótima de um problema de programação linear
- Esses métodos eliminam regiões da formulação do problema P sem penetrar em conv(X), para evitar a perda de uma possível solução ótima
- Por esse motivo, quanto mais próxima é a formulação P em relação a conv(X), menor o número de regiões a serem eliminadas, e os métodos convergem mais rapidamente para a solução ótima
  – Esta é a motivação para encontrar formulações melhores!!!

Formulações Alternativas

- Exemplo: Formulações equivalentes para o problema da Mochila 0-1
  - Considere o conj. de valores binários para a mochila 0-1
    - X={(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1), (1,1,0,1)}
  - E as formulações
    - $P1=\{x \in R4: 0<=xj<=1, j=1,2,3,4, x1+9x2+29x3+4x4<=30\}$
    - $P2=\{x \in R4: 0<=xj<=1, j=1,2,3,4, 0,3x1+2x2+6x3+x4<=6\}$
    - $P3=\{x \in R4: x1 + x3 <=1$
    - $x2+x3 <=1$
    - $x3+x4<=1$
    - $0<=xj<=1, j=1,2,3,4\}$
  - Note que o ponto x2=(1;1;0,45;1) $\in$ P2, mas $\notin$ P3 e o ponto x1=(0;0;1;0,25) $\in$ P1, mas $\notin$ P2. Portanto, P3 $\subset$ P2 $\subset$ P1. Então, P3=conv(X)

Formulações Alternativas

- Suponha que $x \in P3$. Multiplicando por 2 ambos os lados das desigualdades em P3 e depois somando as desigualdades tem-se:
  - $2x1+2x2+6x3+2x4<=6$
  - Isto implica que $0,3x1+2x2+6x3+x4<=6$, portanto $x \in P2$.
- Se $x \in P2$, multiplicando por 5 ambos os lados da desigualdade anterior, resulta:
  - $1,5x1+10x2+30x3+5x4<=30$
- Isso implica que $x1+9x2+29x3+4x4<=30$, portanto, $x \in P1$